



ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ **Active Learning**
เน้นสมรรถนะและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ภาควิชาการ (พว.)



พัฒนาโครงงาน
และการสร้าง
นวัตกรรม



คณิตศาสตร์

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

2

เล่ม **2**



ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ยุพิน พิพิธกุล
รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง

สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)



ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ Active Learning เน้นสมรรถนะและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

คณิตศาสตร์

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ **2**
เล่ม **2**



ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ยุพิน พิพิธกุล
รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง

สงวนลิขสิทธิ์
บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด
พ.ศ. 2568

สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)
1256/9 ถนนนครไชยศรี แขวงถนนนครไชยศรี เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทร: 0-2243-8000 (อัตโนมัติ 15 สาย), 0-2241-8999
แฟกซ์ : ทุกหมายเลข, แฟกซ์อัตโนมัติ : 0-2241-4131, 0-2243-7666

คำนำ

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีผลต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน มีความสามารถในการคิดวิเคราะห์ ปัญหา คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ที่ศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุปและนำไปใช้ประโยชน์ได้ สามารถใช้ในการสื่อความหมาย และเชื่อมโยงความรู้ระหว่างศาสตร์ต่าง ๆ หนังสือชุดกิจกรรมการเรียนรู้ Active Learning เน้นสมรรถนะและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 2 เล่มนี้เป็นหนังสือที่จัดทำขึ้นเพื่อมุ่งพัฒนาสมรรถภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สอดคล้องกับตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

การนำเสนอแนวทางการจัดการเรียนการสอนในหนังสือเล่มนี้ ประกอบด้วย เนื้อหาและความคิดรวบยอด โจทย์เสริมทักษะ แบบฝึกหัดเสริมทักษะ และแบบฝึกทบทวน ที่มุ่งพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และท้ายเล่มยังมีแบบทดสอบที่ครอบคลุมเนื้อหาสาระทุกหน่วยในเล่ม เพื่อให้นักเรียนตรวจสอบความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่เรียนตั้งแต่หน่วยการเรียนรู้แรกจนถึงหน่วยการเรียนรู้สุดท้าย นอกจากนี้ยังส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยวิธีที่หลากหลาย เพื่อพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนตามศักยภาพ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเน้นบทบาทของผู้เรียนเป็นสำคัญ

ผู้เขียนมีความตระหนักในความสำคัญของครูผู้สอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง เพราะท่านเป็นผู้มีบทบาทสำคัญในการนำสิ่งต่าง ๆ ในหนังสือเล่มนี้ไปสู่ห้องเรียน ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าความเข้มแข็งในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ผนวกกับแนวคิดและแนวทางที่นำเสนอไว้ในหนังสือเล่มนี้ จะช่วยพัฒนาเด็กไทยให้รักและมีความสุขในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอในการพัฒนาคุณภาพชีวิต สามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

ผู้เขียน

ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ยุพิน พิพิธกุล

รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง

สารบัญ

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 สถิติ 5

- 1. การนำเสนอข้อมูล 5
- 2. ค่ากลางของข้อมูล 28
- 3. การแปลความหมายผลลัพธ์และการนำไปใช้ 45
- แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 47
- แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 49

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ความเท่ากันทุกประการ 54

- 1. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต 55
- 2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ 62
- แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 82
- แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 88

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เส้นขนานและการนำไปใช้ 95

- 1. เส้นขนาน 95
- 2. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมแย้งและเส้นขนาน 100
- 3. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมภายนอกกับมุมภายในและเส้นขนาน 106
- 4. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมภายในและเส้นขนาน 110
- 5. การนำทฤษฎีบทของเส้นขนานไปใช้แก้ปัญหา 116
- 6. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม 123
- แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 129
- แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 133

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4	การสร้างทางเรขาคณิตและการให้เหตุผล	139
1.	การแบ่งส่วนของเส้นตรง	141
2.	การสร้างมุมขนาดต่าง ๆ	149
3.	การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	154
4.	การให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต	158
	แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 4	165
	แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 4	167

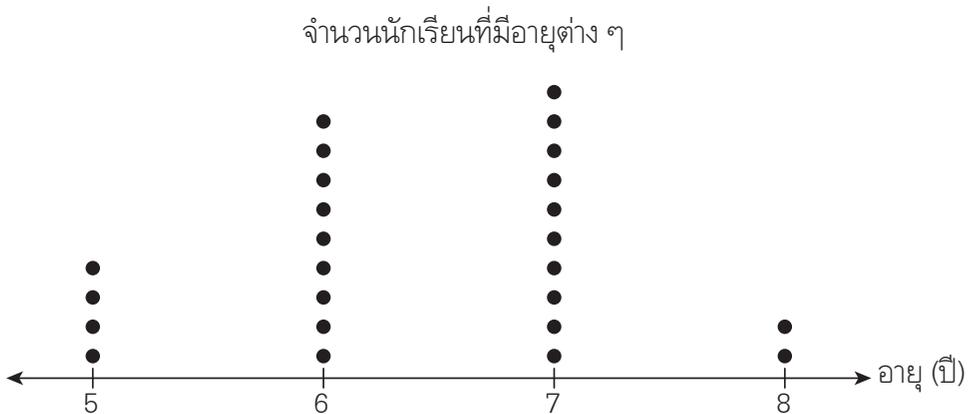
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5	การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง	170
1.	การแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจง	170
2.	การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	174
3.	การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์	182
4.	การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง	185
	แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 5	194
	แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 5	197
	แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1-5	201

1. การนำเสนอข้อมูล

นักเรียนได้เรียนเรื่อง การนำเสนอข้อมูลด้วยตาราง แผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง กราฟเส้น และ แผนภูมิรูปร่างกลมมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 นอกจากการนำเสนอข้อมูลด้วยวิธีการดังกล่าวแล้ว ยังมีการนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภาพจุด แผนภาพต้น - ใบ และฮิสโทแกรม

1.1 แผนภาพจุด

แผนภาพจุด (Dot Plots) เป็นการแสดงรูปร่างของกลุ่มของข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป โดยแกนนอนของกราฟจะแสดงหน่วยวัด ตัวอย่างเช่น



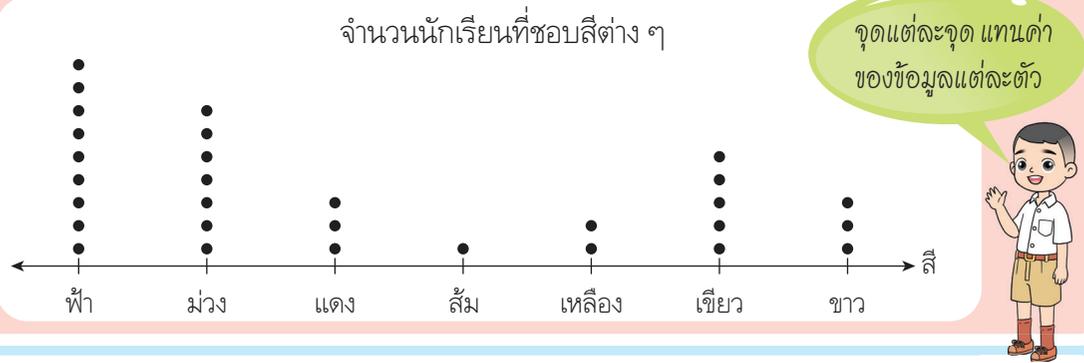
จากแผนภาพจุด แสดงว่านักเรียนกลุ่มนี้ส่วนใหญ่มีอายุ 6 และ 7 ปี นักเรียนอายุ 8 ปีมีจำนวนน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 1 จากการสอบถามนักเรียนจำนวน 30 คน เกี่ยวกับสีต่าง ๆ ที่นักเรียนชอบ เป็นดังนี้

ฟ้า ม่วง แดง ส้ม เหลือง เขียว ขาว ฟ้า ฟ้า ม่วง ม่วง แดง เขียว ฟ้า ฟ้า
 เขียว ขาว เหลือง ฟ้า ม่วง ม่วง แดง เขียว ฟ้า ขาว ฟ้า ม่วง ม่วง เขียว ฟ้า

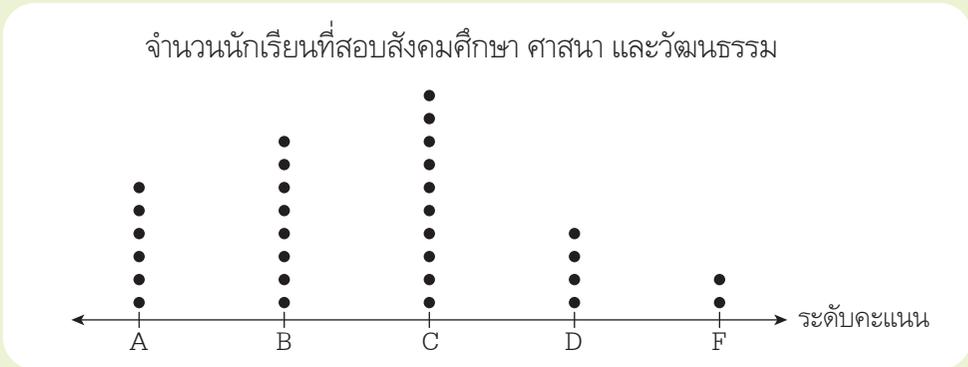
ขั้นตอนการสร้าง

- 1) ลากเส้นแกนนอนแสดงสีที่นักเรียนชอบ
- 2) เขียนจุดแทนจำนวนนักเรียนที่ชอบแต่ละสี เมื่อข้อมูลซ้ำให้เขียนในแถวที่สองขึ้นไป เขียนแผนภาพจุดได้ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาแผนภาพจุด และตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) แผนภาพจุดแสดงข้อมูลเกี่ยวกับอะไร
- 2) มีนักเรียนจำนวนกี่คนที่ได้แต่ละระดับคะแนน
- 3) มีนักเรียนจำนวนกี่คนที่ได้ระดับคะแนนตั้งแต่ C ขึ้นไป
- 4) มีจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมดกี่คน



ตอบคำถาม

- 1) แผนภาพจุดแสดงข้อมูลเกี่ยวกับผลการสอบสังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม ซึ่งมีนักเรียนได้ระดับคะแนน A, B, C, D และ F
- 2) จำนวนนักเรียนที่ได้ระดับคะแนน A, B, C, D และ F มี 6 คน 8 คน 10 คน 4 คน และ 2 คน ตามลำดับ
- 3) จำนวนนักเรียนที่ได้ระดับคะแนนตั้งแต่ C ขึ้นไปมี $10 + 8 + 6 = 24$ คน
- 4) จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบสังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรมมีทั้งหมด $24 + 4 + 2 = 30$ คน

1.2 แผนภาพต้น - ใบ

แผนภาพต้น - ใบ (Stem and Leaf Plots) เป็นการจัดการข้อมูลเป็นกลุ่ม ๆ หรือเป็นช่วง ๆ โดยมีหลักการเขียนส่วนประกอบออกเป็นสองส่วน คือ **ส่วนต้น (Stem)** และ **ส่วนใบ (Leaf)**

ส่วนต้น ในกรณีที่ข้อมูลมีค่าสูงสุดไม่เกิน 999 จะมีเลขโดดในหลักร้อยและเลขโดดในหลักสิบของข้อมูลเป็นส่วนต้น ในกรณีที่ข้อมูลมีค่าสูงสุดไม่เกิน 99 จะมีเลขโดดในหลักสิบเป็นส่วนต้น

ส่วนใบ เป็นส่วนที่แสดงข้อมูลส่วนย่อย โดยเขียนหลักหน่วยของข้อมูลเป็นส่วนใบ

แผนภาพต้น - ใบ เป็นการแสดงลักษณะของข้อมูลตามค่าประจำหลักของเลขโดด โดยใบจะเป็นเลขโดดที่อยู่ทางด้านขวาสุด และต้นจะเป็นตัวเลขทั้งหมดที่อยู่ด้านซ้ายของใบ ตัวอย่างเช่น การนำเสนอข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งมี 810 36 และ 4

ต้น	ใบ
81	0
3	6
0	4

810 จะมี 81 เป็นส่วนต้น และมี 0 เป็นส่วนใบ
 36 จะมี 3 เป็นส่วนต้น และมี 6 เป็นส่วนใบ
 4 จะมี 0 เป็นส่วนต้น และมี 4 เป็นส่วนใบ

ตัวอย่างที่ 1

คะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง คะแนนเต็ม 60 คะแนน ดังนี้

32 41 46 38 45 41 44 41 50 49
 52 33 45 46 58 51 42 59 54 36

เขียนแผนภาพต้น - ใบ และตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) แผนภาพแสดงคะแนนสอบคณิตศาสตร์ตั้งแต่คะแนนเท่าไรถึงคะแนนเท่าไร
- 2) นักเรียนจำนวนมากที่สุดได้คะแนนเท่าไร และมีนักเรียนกี่คน
- 3) นักเรียนที่ได้คะแนนน้อยกว่า 40 คะแนน มีกี่คน
- 4) นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50 คะแนนขึ้นไปมีกี่คน

วิธีทำ จากการพิจารณาข้อมูลพบว่า คะแนนสอบอยู่ระหว่าง 32 - 59 คะแนน ดังนี้

1) แบ่งข้อมูลเป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

กลุ่มที่ 1	คะแนนสอบ	30 - 39	คะแนน
กลุ่มที่ 2	คะแนนสอบ	40 - 49	คะแนน
กลุ่มที่ 3	คะแนนสอบ	50 - 59	คะแนน

- 2) นำข้อมูล 3 กลุ่ม มาสร้างเป็นต้น (Stem) ในแนวตั้ง โดยใช้เลขโดดจากหลักสิบของแต่ละกลุ่มได้ ดังนี้

	ต้น
ส่วนต้น	3
	4
	5

- 3) เขียนส่วนของใบ (Leaf) โดยใช้เลขโดดหลักหน่วยของข้อมูลในแนวนอน ดังนี้

ต้น	ใบ
3	2 8 3 6
4	1 6 5 1 4 1 9 5 6 2
5	0 2 8 1 9 4

} ส่วนของใบ

- 4) เขียนแผนภาพต้น - ใบ โดยเขียนเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ดังนี้

ต้น	ใบ
3	2 3 6 8
4	1 1 1 2 4 5 5 6 6 9
5	0 1 2 4 8 9

แผนภาพแสดงคะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ตอบคำถาม

- 1) แผนภาพแสดงคะแนนสอบคณิตศาสตร์ตั้งแต่ 32 คะแนน ถึง 59 คะแนน
- 2) นักเรียนจำนวนมากที่สุดได้ 41 คะแนน และมี 3 คน
- 3) นักเรียนที่ได้คะแนนน้อยกว่า 40 คะแนน มี 4 คน
- 4) นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50 คะแนนขึ้นไปมี 6 คน

สามารถใช้แผนภาพต้น - ใบ ในการนำเสนอข้อมูล 2 ชุดพร้อมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 คะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนสองกลุ่ม เป็นดังนี้

กลุ่มที่ 1	92	63	80	75	84	94	72	68
กลุ่มที่ 2	80	94	89	72	83	96	87	76

เขียนแผนภาพต้น - ใบ และตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) ในกลุ่มที่ 1 มีนักเรียนกี่คนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 76 คะแนนของการสอบครั้งนี้ และต้องสอบซ่อม
- 2) ในกลุ่มที่ 2 มีนักเรียนกี่คนที่สอบได้คะแนนไม่น้อยกว่า 76 คะแนนของการสอบครั้งนี้ และไม่ต้องสอบซ่อม

วิธีทำ

- 1) เขียนส่วนที่เป็นต้นร่วมกันในแนวตั้ง ดังนี้

ใบ (กลุ่มที่ 1)	ต้น	ใบ (กลุ่มที่ 2)
	6	
	7	
	8	
	9	

- 2) เขียนส่วนของใบจากข้อมูลทั้ง 2 ชุดในแนวนอน โดยเขียนเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ดังนี้

ใบ (กลุ่มที่ 1)	ต้น	ใบ (กลุ่มที่ 2)
8 3	6	
5 2	7	2 6
4 0	8	0 3 7 9
4 2	9	4 6

แผนภาพแสดงคะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ตอบคำถาม

- 1) ในกลุ่มที่ 1 มีนักเรียน 4 คน ที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 76 คะแนน และต้องสอบซ่อม
- 2) ในกลุ่มที่ 2 มีนักเรียน 7 คน ที่สอบได้คะแนนไม่น้อยกว่า 76 คะแนน และไม่ต้องสอบซ่อม

ข้อมูลข้างต้นอาจนำเสนอข้อมูลด้วยตารางแจกแจงความถี่ได้ ดังนี้

ตารางแสดงจำนวนสมาชิกในครอบครัวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 30 คน

จำนวนสมาชิกในครอบครัว (คน)	รอยขีด	ความถี่ (f)
3	I	6
4	I	6
5	I	6
6		3
7	I	6
8		3

จากข้อมูลข้างต้น จะเห็นว่าข้อมูลชุดนี้มีค่าสูงสุดเป็น 8 และค่าต่ำสุดเป็น 3 เรียกความแตกต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของข้อมูลว่า **พิสัย (Range)**



$$\text{พิสัย} = \text{ค่าสูงสุดของข้อมูล} - \text{ค่าต่ำสุดของข้อมูล}$$

จะได้ว่า ข้อมูลข้างต้นมีพิสัยเป็น $8 - 3 = 5$

การแจกแจงความถี่โดยใช้ค่าแต่ละค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด อาจทำให้เสียเวลาในการรวบรวมข้อมูลที่มีอยู่เป็นจำนวนมากให้อยู่เป็นพวก และยังยากในการสรุปผลที่สำคัญ ๆ ให้รัดกุม และง่ายต่อการนำไปใช้ ดังนั้น จึงใช้การหาความถี่ของคะแนนในแต่ละช่วงหรือ**อันตรภาคชั้น (Class Interval)** แทน โดยการแบ่งค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกเป็นช่วง ๆ ให้แต่ละช่วงประกอบด้วยค่าที่เป็นไปได้หลาย ๆ ค่า เพื่อให้ค่าที่เป็นไปได้ใหม่ที่ใช้นั้นแทนด้วยช่วงหรืออันตรภาคชั้นมีจำนวนลดลง และง่ายต่อการนำตารางที่ได้ไปใช้ประโยชน์ต่อไป จากนั้นดูว่าค่าจากการสังเกตหรือคะแนนสอบของนักเรียนตกอยู่ในแต่ละช่วงเป็นจำนวนเท่าใด เช่น ถ้าให้แต่ละช่วงมีคะแนนต่างกัน 10 คะแนน เมื่อมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน จะได้จำนวนช่วงประมาณ 10 ช่วง แต่ละช่วงนี้จะใช้แทนค่าที่เป็นไปได้ชุดใหม่ที่จะใช้สำหรับสร้างตารางแจกแจงความถี่

ตัวอย่างความกว้างของอันตรภาคชั้น

อันตรภาคชั้น 51 - 60 แสดงค่า 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 และ 60

กล่าวได้ว่า **อันตรภาคชั้นมีความกว้างของอันตรภาคชั้นเป็น 10**

การสร้างตารางแจกแจงความถี่

ในการสร้างตารางแจกแจงความถี่โดยทั่ว ๆ ไปมักจะกำหนดจำนวนชั้นของอันตรภาคชั้นก่อน และจะแบ่งช่วงคะแนนออกเป็นกี่ชั้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนของข้อมูลว่ามีมากน้อยเพียงใด ถ้าจำนวนของข้อมูลมีมาก ก็จะแบ่งข้อมูลได้จำนวนชั้นมาก แต่ไม่ควรเกิน 15 ชั้น ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาข้อมูลต่ำสุดและข้อมูลสูงสุด

ขั้นที่ 2 หาพิสัยของข้อมูล (พิสัย = ค่าสูงสุดของข้อมูล - ค่าต่ำสุดของข้อมูล)

ขั้นที่ 3 กำหนดจำนวนอันตรภาคชั้นตามความเหมาะสม โดยทั่วไปนิยม 5 ถึง 15 โดยใช้



$$\text{จำนวนอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น}}$$

- ในกรณีที่หารลงตัว จะได้จำนวนอันตรภาคชั้นเท่ากับจำนวนนั้นบวกด้วย 1
- ในกรณีที่หารเหลือเศษหรือไม่ลงตัว ให้ปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็มเสมอ



ขั้นที่ 4 อ่านข้อมูลที่ละตัว พร้อมทั้งเขียนรอยขีดแสดงจำนวนครั้งในช่องที่ตรงกับข้อมูลนั้นอยู่ในอันตรภาคชั้นจนครบทุกตัว

ขั้นที่ 5 นับรอยขีด แล้วเขียนจำนวนในช่องความถี่

ตัวอย่างที่ 1

ข้อมูลต่อไปนี้เป็นคะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียน 60 คน

84	79	65	78	78	62	80	67	82	73
81	48	60	74	67	75	48	80	71	62
52	62	76	76	65	63	68	51	48	53
71	75	74	77	68	73	61	66	96	79
67	70	61	81	57	71	57	69	60	76
81	93	75	72	60	65	56	75	88	35

สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนทั้งหมดนี้ให้มีความกว้างของอันตรภาคชั้นเป็น 10

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 คะแนนต่ำสุด คือ 35 และคะแนนสูงสุด คือ 96

ขั้นที่ 2 พิสัย = คะแนนสูงสุด - คะแนนต่ำสุด = $96 - 35 = 61$

ขั้นที่ 3 กำหนดความกว้างของอันตรภาคชั้นเท่ากับ 10 จะได้

$$\text{จำนวนอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น}} = \frac{61}{10} = 6.1$$

ดังนั้น จำนวนอันตรภาคชั้นเท่ากับ 7

สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนทั้งหมดได้ ดังนี้

คะแนนสอบ	รอยขีด	ความถี่ (f)
30 - 39	I	1
40 - 49	III	3
50 - 59	HH I	6
60 - 69	HH HH HH IIII	19
70 - 79	HH HH HH HH I	21
80 - 89	HH III	8
90 - 99	II	2
รวม		60

หมายเหตุ

เนื่องจากไม่มีค่าจากการสังเกตใดตกอยู่ในอันตรภาคชั้นที่มีค่าต่ำกว่า 30 จึงไม่จำเป็นต้องมีอันตรภาคชั้นที่มีค่าต่ำกว่า 30 ในตารางแจกแจงความถี่

ตัวอย่างที่ 2

ในการสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง จำนวน 50 คน ปรากฏผลการสอบ ดังนี้

90	175	125	108	118	110	72	96	74	120
165	110	75	85	132	149	107	95	100	77
99	148	152	102	80	105	164	170	100	115
87	130	135	111	182	92	98	170	165	170
76	88	81	86	104	92	137	99	90	178

สร้างตารางแจกแจงความถี่ โดยให้ความกว้างของอันตรภาคชั้นเป็น 10

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 คะแนนต่ำสุด คือ 72 และคะแนนสูงสุด คือ 182

ขั้นที่ 2 พิสัย = คะแนนสูงสุด - คะแนนต่ำสุด = $182 - 72 = 110$

ขั้นที่ 3 กำหนดความกว้างของอันตรภาคชั้นเท่ากับ 10 จะได้

$$\text{จำนวนอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น}} = \frac{110}{10} = 11$$

ดังนั้น จำนวนอันตรภาคชั้นเท่ากับ $11 + 1 = 12$

เนื่องจากไม่มีค่าจากการสังเกตใดมีค่าต่ำกว่า 65 จึงไม่จำเป็นต้องมีอันตรภาคชั้นที่มีค่าต่ำกว่า 65 ในตารางแจกแจงความถี่

จากข้อมูลข้างต้น สร้างตารางแจกแจงความถี่ได้ ดังนี้

คะแนนสอบ	รอยขีด	ความถี่ (f)
65 - 74		2
75 - 84		5
85 - 94	III	8
95 - 104	IIII	9
105 - 114	I	6
115 - 124		3
125 - 134		3
135 - 144		2
145 - 154		3
155 - 164	I	1
165 - 174		5
175 - 184		3
รวม		50

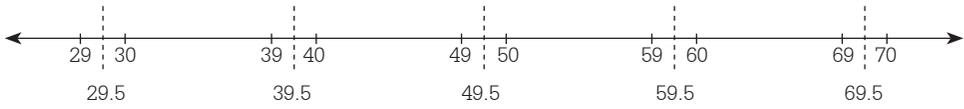
จากตัวอย่างที่ 2 การสร้างตารางแจกแจงความถี่ อาจจะเริ่มด้วยคะแนนต่ำสุดหรือคะแนนสูงสุดก่อนก็ได้ ดังแสดงได้ในตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

คะแนนสอบ	รอยขีด	ความถี่ (f)
72 - 81	II	7
82 - 91	I	6
92 - 101	IIII	9
102 - 111	III	8
112 - 121		3
122 - 131		2
132 - 141		3
142 - 151		2
152 - 161	I	1
162 - 171	I	6
172 - 181		2
182 - 191	I	1
รวม		50

เริ่มต้นด้วย
คะแนนต่ำสุด
คือ 72 คะแนน

ในชีวิตประจำวันเรามักเจอข้อมูลที่ได้จากการชั่ง ตวง วัด จำนวนเหล่านี้บางที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม เช่น การชั่งน้ำหนักของนักเรียน ค่าที่อ่าน คือ 50 กิโลกรัม แต่ในความเป็นจริงค่านี้เป็นเพียงค่าประมาณ น้ำหนักจริง ๆ อาจจะเป็น 49.7 หรือ 50.4 กิโลกรัม ดังนั้น เมื่อนำข้อมูลมาเสนอในตารางแจกแจงความถี่ จึงควรพิจารณา **ขอบล่างและขอบบน** ของข้อมูล

พิจารณาช่วงคะแนนแต่ละช่วง คือ 30 - 39, 40 - 49, ..., 90 - 99 เป็นอันตรภาคชั้น



คะแนน 29.5, 39.5, 49.5, ..., 89.5 เป็น**ขอบล่าง (Lower Boundary)** ของแต่ละอันตรภาคชั้นตามลำดับ ขอบล่าง คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างคะแนนที่น้อยที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้นกับคะแนนที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและเป็นช่วงคะแนนที่ต่ำกว่า เช่น

$$\text{ขอบล่างของอันตรภาคชั้น } 40 - 49 \text{ เท่ากับ } \frac{40 + 39}{2} = 39.5$$

$$\text{ขอบล่างของอันตรภาคชั้น } 80 - 89 \text{ เท่ากับ } \frac{80 + 79}{2} = 79.5$$

ในกรณีที่จะหาขอบล่างที่เป็นช่วงคะแนนต่ำสุด ให้ถือเสมือนว่ามีอันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนที่ต่ำกว่าชั้นนั้นอยู่อีกหนึ่งชั้น เช่น ขอบล่างของอันตรภาคชั้น 30 - 39 เท่ากับ $\frac{30 + 29}{2} = 29.5$

คะแนน 39.5, 49.5, 59.5, ..., 99.5 เป็น**ขอบบน (Upper Boundary)** ของแต่ละอันตรภาคชั้นตามลำดับ ขอบบน คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างคะแนนที่มากที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้นกับคะแนนที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและเป็นช่วงคะแนนที่สูงกว่า เช่น

$$\text{ขอบบนของอันตรภาคชั้น } 30 - 39 \text{ เท่ากับ } \frac{39 + 40}{2} = 39.5$$

$$\text{ขอบบนของอันตรภาคชั้น } 70 - 79 \text{ เท่ากับ } \frac{79 + 80}{2} = 79.5$$

ในกรณีที่จะหาขอบบนของช่วงคะแนนสูงสุด ให้ถือเสมือนว่ามีอันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนที่สูงกว่าชั้นนั้นอยู่อีกหนึ่งชั้น เช่น ขอบบนของอันตรภาคชั้น 90 - 99 เท่ากับ $\frac{99 + 100}{2} = 99.5$

ความกว้างของอันตรภาคชั้น หาได้จากผลต่างระหว่างขอบบนและขอบล่างของอันตรภาคชั้นนั้น เช่น ความกว้างของอันตรภาคชั้น 30 - 39 เท่ากับ $39.5 - 29.5 = 10$

ขอบล่างและขอบบนหาได้จาก

$$\text{ขอบล่าง} = \frac{\text{ค่าน้อยสุดของชั้นนั้น} + \text{ค่ามากที่สุดของชั้นที่ต่ำกว่า}}{2}$$

$$\text{ขอบบน} = \frac{\text{ค่ามากที่สุดของชั้นนั้น} + \text{ค่าน้อยสุดของชั้นที่สูงกว่า}}{2}$$

ความกว้างของอันตรภาคชั้น หาได้ดังนี้

$$\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น} = \text{ขอบบน} - \text{ขอบล่าง}$$



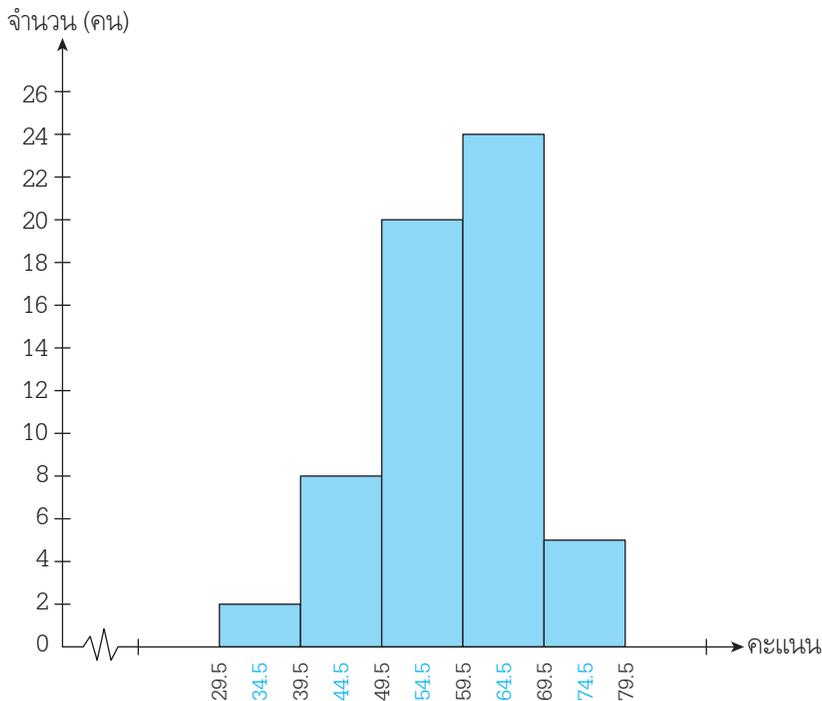
พิจารณตารางแจกแจงความถี่แสดงคะแนนสอบวิทยาศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ดังนี้

คะแนนสอบ	จำนวน (คน)
30 - 39	2
40 - 49	8
50 - 59	20
60 - 69	24
70 - 79	5

เขียนข้อมูลในตารางแจกแจงความถี่ที่แสดงขอบล่างและขอบบนของคะแนนสอบวิทยาศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มนี้ ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกันได้ ดังนี้

คะแนนสอบ	จำนวน (คน)
29.5 - 39.5	2
39.5 - 49.5	8
49.5 - 59.5	20
59.5 - 69.5	24
69.5 - 79.5	5

จากตารางแจกแจงความถี่ข้างต้น สร้างเป็นฮิสโทแกรมได้ ดังรูป



ฮิสโทแกรม ประกอบด้วย

1. แกนตั้งและแกนนอน

โดยที่ แกนตั้ง แสดง ความถี่ของข้อมูลในแต่ละชั้น
แกนนอน แสดง ความกว้างของอันตรภาคชั้น

2. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากวางชิดติดกันที่มีความกว้างเท่ากับความกว้างของอันตรภาคชั้น
และความสูงเท่ากับความถี่ของข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น

3. ขอบล่างและขอบบนของแต่ละอันตรภาคชั้นที่เรียงต่อกัน

รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการใช้แผนภาพในการนำเสนอข้อมูล
ในกรณีที่มีฮิสโทแกรมอยู่แล้ว สามารถเขียนรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ได้อย่างง่ายดาย ดังนี้

1. กำหนดจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นที่อยู่ก่อนอันตรภาคชั้นที่ต่ำที่สุด
จุดนี้จะอยู่บนแกนนอน
2. กำหนดจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นที่อยู่ถัดจากอันตรภาคชั้นสูงสุดออกไป
จุดนี้จะอยู่บนแกนนอน
3. กำหนดจุดกึ่งกลางของด้านบนของรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูปในฮิสโทแกรม
4. เขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดเหล่านี้ระหว่างสองจุดใด ๆ ที่อยู่ติดกัน

รูปที่ล้อมด้วยแกนนอนและส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมกันดังกล่าวนี้เรียกว่า รูปหลายเหลี่ยม
ของความถี่

จุดกึ่งกลางชั้น หาได้จาก

$$\text{จุดกึ่งกลางชั้น} = \frac{\text{ขอบบน} + \text{ขอบล่าง}}{2}$$

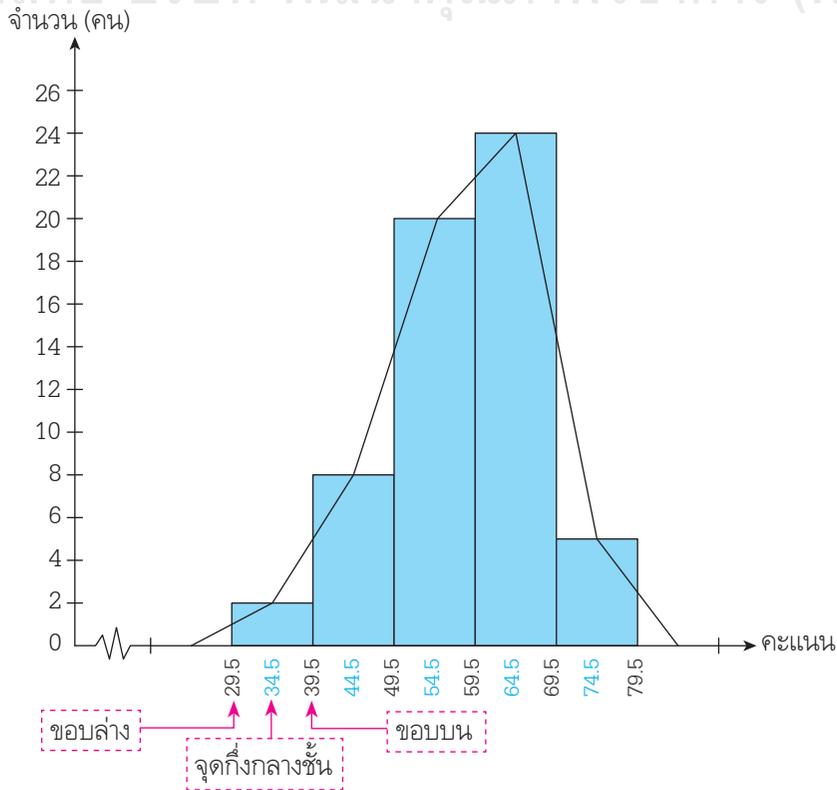
หรือ

$$\text{จุดกึ่งกลางชั้น} = \frac{\text{ค่ามากที่สุดของชั้นนั้น} + \text{ค่าน้อยสุดของชั้นนั้น}}{2}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\text{จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น } 50 - 59 = \frac{59.50 + 49.50}{2} = 54.5$$

จากฮิสโทแกรมข้างต้น เมื่อลากส่วนของเส้นตรงเริ่มที่จุดบนแกนนอนในอันตรภาคชั้นก่อน
ชั้นต่ำสุดเชื่อมจุดกึ่งกลางชั้นของทุกอันตรภาคชั้น และจบที่จุดกึ่งกลางชั้นถัดไปของอันตรภาคชั้นสูงสุด
จะได้รูปหลายเหลี่ยมความถี่ ดังภาพ



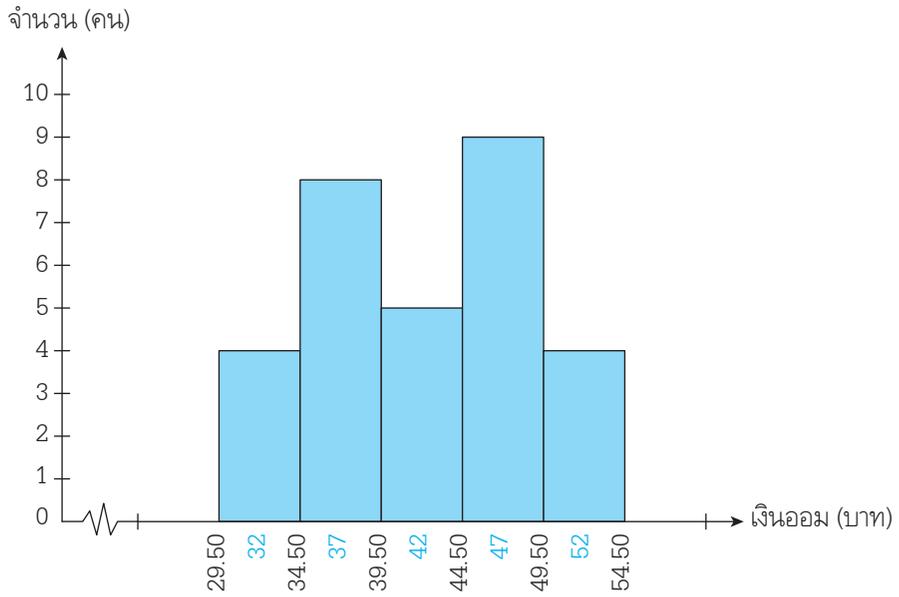
ตัวอย่างที่ 3 จำนวนเงินออมที่นักเรียนกลุ่มหนึ่งเก็บได้ใน 1 สัปดาห์

เงินออม (บาท)	จำนวน (คน)
30 - 34	4
35 - 39	8
40 - 44	5
45 - 49	9
50 - 54	4

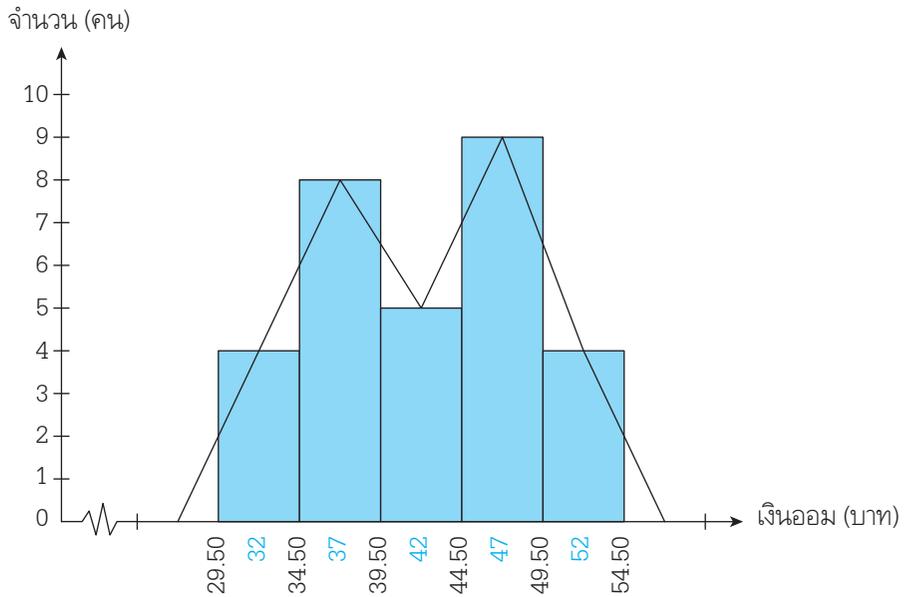
สร้างฮิสโทแกรมและรูปหลายเหลี่ยมของความถี่

วิธีทำ 1) สร้างฮิสโทแกรม

เงินออม (บาท)	ขอบล่าง	ขอบบน	จุดกึ่งกลางชั้น	จำนวน (คน)
30 - 34	29.50	34.50	32	4
35 - 39	34.50	39.50	37	8
40 - 44	39.50	44.50	42	5
45 - 49	44.50	49.50	47	9
50 - 54	49.50	54.50	52	4



2) สร้างรูปหลายเหลี่ยมของความถี่



2. ค่ากลางของข้อมูล

การหาค่ากลางของข้อมูลเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (Measures of Central Tendency) ซึ่งโอกุสตุส เดอ มอร์แกน (Augustus de Morgan) ได้สรุปว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean) เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดที่จะใช้แทนข้อมูลทั้งหมดมากกว่าค่ากลางชนิดอื่น ๆ เช่น ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และได้รับการสนับสนุนจากโทมัส ชิมป์สัน ส่วนมัชฌิมฐาน เฟคเนอร์ (G.T. Fechner) ได้ศึกษาและพิจารณากรณีเฉพาะที่มีมัชฌิมฐาน (Median) ใช้ได้อย่างเหมาะสมกว่าค่าเฉลี่ยชนิดอื่น ๆ ในกรณีที่ข้อมูลนั้น ๆ มีค่าใดค่าหนึ่งหรือหลาย ๆ ค่า ซึ่งสูงหรือต่ำกว่าค่าอื่น ๆ ที่เหลืออย่างผิดปกติ และฐานนิยม (Mode) เป็นค่ากลางที่ถูกแนะนำในปี 1985 โดย คาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson) และจี ออดนี ยูล (G. Udny Yule) โดยได้นำไปใช้ในการกำหนดการประกันภัยของคณงาน ในเวลาต่อมาขอบข่ายของวิชาสถิติได้ขยายออกไปอย่างกว้างขวางและรวดเร็ว โดยสถิติแทนที่จะเป็นข้อมูลเกี่ยวกับรัฐเพียงอย่างเดียว ได้กลายมาเป็นข้อมูลที่แสดงถึงสถานะทางเศรษฐกิจและสังคม ภูมิศาสตร์ วงการแพทย์ วงการศึกษา ตลอดจนการทดลองทางวิทยาศาสตร์

ถ้าถามว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีอายุเท่าไร คำตอบของคำถามนี้ควรเป็นคำตอบข้อใดต่อไปนี้

1. อายุที่น้อยที่สุดของนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนแห่งนี้
2. อายุที่มากที่สุดของนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนแห่งนี้
3. อายุของนักเรียนส่วนใหญ่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนแห่งนี้
4. รวมอายุของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ทุกคน แล้วหารด้วยจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ทั้งหมดของโรงเรียนแห่งนี้ได้เท่าไรนั่นคือคำตอบ
5. เรียงลำดับอายุของนักเรียนจากน้อยไปมาก แล้วเลือกอายุของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่อยู่ตรงกลาง คือ มีจำนวนนักเรียนที่มีอายุน้อยกว่าหรือมากกว่าอายุนั้น เป็นจำนวนเท่ากัน

เมื่อพิจารณาคำตอบจะเห็นว่า ถ้าใช้อายุตามข้อ 1 หรือข้อ 2 เป็นคำตอบ ก็จะได้ตัวแทนของอายุที่ไม่เหมาะสม เนื่องจากเป็นอายุที่น้อยที่สุดหรืออายุที่มากที่สุด จึงทำให้เกิดความเข้าใจผิดได้

ดังนั้น ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปในวิชาสถิติ การเลือกใช้ตัวแทนของข้อมูลชุดใดชุดหนึ่งจะทำได้โดยใช้วิธีการในข้อ 3 หรือข้อ 4 หรือข้อ 5 วิธีใดวิธีหนึ่ง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโอกาสที่นำไปใช้ และตามความเหมาะสมของข้อมูล คำตอบที่ได้ในข้อ 3 หรือข้อ 4 หรือข้อ 5 เรียกว่า ค่ากลางของข้อมูล ซึ่งมีชื่อเฉพาะแต่ละชื่อ ดังนี้

2.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ค่าเฉลี่ย (Mean) เป็นการหาค่ากลางของข้อมูล โดยการนำผลรวมของข้อมูลทั้งหมดในชุดนั้นหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด



$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} = \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$$

$$\text{หรือใช้สูตร } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นข้อมูลแต่ละตัว

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เขียนแทนด้วย \bar{x} อ่านว่า เอกซ์บาร์

โดยที่ Σ คือ สัญลักษณ์แทนการบวก (Summation) หรืออาจเรียกว่า ซิกมา

N แทนด้วย จำนวนข้อมูลทั้งหมด

$$\text{เขียนย่อเป็น } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

ตัวอย่างที่ 1 ตะกร้าผลไม้ 3 ใบ มีจำนวนส้มโอ ดังนี้



หาจำนวนส้มโอโดยเฉลี่ย

วิธีทำ

ตะกร้าแต่ละใบมีส้มโอ 4 ผล 2 ผล และ 6 ผล ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} &= \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}} \\ &= \frac{4 + 2 + 6}{3} \\ &= \frac{12}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยเฉลี่ยมีส้มโอในตะกร้า 4 ผล

ตัวอย่างที่ 2

คะแนนสอบวิทยาศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง เป็นดังนี้

ต้น	ใบ						
2	2	2	4	5	5		
3	2	3	5	6	8	9	9
4	0	0	1	3	7	8	9
5	0						

คะแนนสอบเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้เป็นเท่าใด

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด} &= 22 + 22 + 24 + 25 + 25 + 32 + 33 + 35 + 36 \\
 &\quad + 38 + 39 + 39 + 40 + 40 + 41 + 43 + 47 + 48 \\
 &\quad + 49 + 50 \\
 &= 728 \\
 \text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} &= \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}} \\
 &= \frac{728}{20} \\
 &= 36.4
 \end{aligned}$$

ดังนั้น คะแนนสอบเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้ คือ 36.4 คะแนน

ตัวอย่างที่ 3

ถ้าคะแนนเฉลี่ยของการสอบสถิติของนักเรียน 10 คน ซึ่งได้คะแนน ดังนี้

10 20 12 a 24 29 28 30 a และ 17 เท่ากับ 20 คะแนน

หาคะแนนของ a

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} &= \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}} \\
 20 &= \frac{10 + 20 + 12 + a + 24 + 29 + 28 + 30 + a + 17}{10} \\
 20 &= \frac{2a + 170}{10} \\
 2a + 170 &= 20 \times 10 \\
 2a + 170 &= 200 \\
 2a &= 200 - 170 \\
 2a &= 30 \\
 a &= \frac{30}{2} \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

ดังนั้น a เท่ากับ 15 คะแนน

ตัวอย่างที่ 4 ในการหาคะแนนเฉลี่ยของการสอบคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของนักเรียนห้องหนึ่งจำนวน 30 คน ได้คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 56.4 คะแนน แต่จากการตรวจสอบพบว่า อ่านคะแนนของนักเรียนผิดไปสองคน คือ คนแรกสอบได้ 69 คะแนน แต่อ่านเป็น 60 คะแนน และคนที่สองสอบได้ 65 คะแนน แต่อ่านเป็น 56 คะแนน หาคะแนนเฉลี่ยที่ถูกต้องของการสอบของนักเรียนที่เรียนห้องนี้

วิธีทำ

$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} = \frac{\text{ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$$

$$56.4 = \frac{\text{ผลรวมของคะแนนทั้งหมด}}{30}$$

$$\text{ผลรวมของคะแนนทั้งหมด} = 56.4 \times 30$$

$$= 1,692$$

ดังนั้น ผลรวมของคะแนนสอบคณิตศาสตร์เท่ากับ 1,692 คะแนน
ในการหาคะแนนเฉลี่ยครั้งแรกอ่านคะแนนคลาดเคลื่อนไป

$$(69 - 60) + (65 - 56) = 9 + 9 = 18 \quad \text{คะแนน}$$

ผลรวมของคะแนนการสอบที่ถูกต้องเท่ากับ $1,692 + 18 = 1,710$ คะแนน

ดังนั้น คะแนนเฉลี่ยที่ถูกต้องของการสอบครั้งนี้เท่ากับ $\frac{1,710}{30} = 57$ คะแนน



แบบฝึกหัดที่ 4

1. เติมคำตอบลงในช่องว่าง

1) จำนวนผู้โดยสารของรถประจำทาง 5 คัน เป็นดังนี้



41 คน



35 คน



36 คน



39 คน



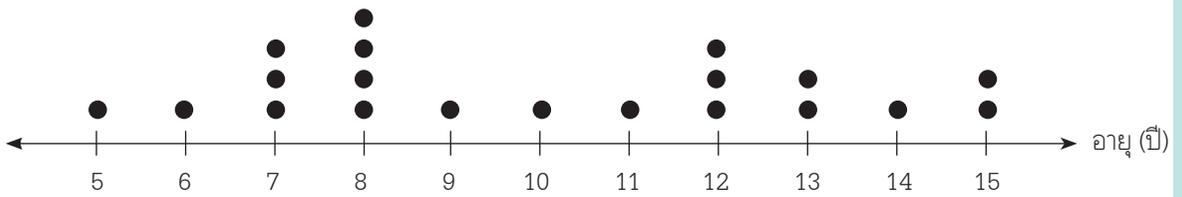
34 คน

มีผู้โดยสารรถประจำทางจำนวน _____ คัน

จำนวนผู้โดยสารทั้งหมดที่หนึ่งในรถประจำทาง _____ คน

โดยเฉลี่ยมีผู้โดยสารในรถประจำทาง _____ คน

2) อายุของเด็กกลุ่มหนึ่ง เป็นดังนี้



เด็กกลุ่มนี้มีจำนวน _____ คน

เด็กกลุ่มนี้มีอายุรวมกัน _____ ปี

อายุเฉลี่ยของเด็กกลุ่มนี้ _____ ปี

3) น้ำหนักของผลไม้ เป็นดังนี้

ทุเรียน 3.7 กิโลกรัม เงาะ 2.9 กิโลกรัม

มังคุด 4.5 กิโลกรัม ส้ม 5.4 กิโลกรัม

แอปเปิล 3.5 กิโลกรัม องุ่น 2.5 กิโลกรัม

มีผลไม้ _____ ชนิด

น้ำหนักรวมของผลไม้ทั้งหมด _____ กิโลกรัม

น้ำหนักโดยเฉลี่ยของผลไม้ทั้งหมด _____ กิโลกรัม

2. เติมจำนวนลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	ข้อมูล	ผลรวมของข้อมูล	จำนวนข้อมูลทั้งหมด	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
1)	12 17 18 21 23 17	108	6	$\frac{108}{6} = 18$
2)	25 23 24 27 30 23 29 39	220	8	_____
3)	25 30 18 37 40	_____	_____	_____
4)	43 45 38 34 37 41 42	_____	_____	_____
5)	23 22.6 23.8 23.4	_____	_____	_____

3. ในการสอบคณิตศาสตร์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 15 คน ได้คะแนน ดังนี้

12 14 8 10 9 7 12 18 17 13 12 11 12 9 13

หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้

$$\text{จาก } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

$\bar{x} =$ _____

$=$ _____

$=$ _____

4. โรงสีข้าวแห่งหนึ่งสีข้าวเปลือกในแต่ละวันได้ ดังนี้

วันจันทร์ 50 เกวียน วันพฤหัสบดี 60 เกวียน

วันอังคาร 75 เกวียน วันศุกร์ 55 เกวียน

วันพุธ 40 เกวียน วันเสาร์ 44 เกวียน

หาค่าเฉลี่ยของจำนวนข้าวเปลือกที่โรงสีข้าวแห่งนี้สีได้



5. ยูพรฝากเงินธนาคารแห่งหนึ่งในแต่ละเดือน ตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนกรกฎาคม เพื่อมอบให้คุณแม่ในวันแม่แห่งชาติ ดังนี้

เดือน	จำนวนเงิน (บาท)
มกราคม	1,200
กุมภาพันธ์	1,100
มีนาคม	1,175
เมษายน	1,188
พฤษภาคม	1,150
มิถุนายน	1,250
กรกฎาคม	

ตัวอย่างที่ 1

หามัธยฐานน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของไก่ 5 ตัว ดังนี้

1 2 1.5 2.5 1.75

วิธีทำ

เรียงน้ำหนักของไก่จากน้อยไปมาก

1 1.5 1.75 2 2.5

ตำแหน่งของมัธยฐาน คือ $\frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

ดังนั้น มัธยฐานของน้ำหนักของไก่ 5 ตัวนี้ คือ ตำแหน่งที่ 3 นั่นคือ 1.75 กิโลกรัม

ตัวอย่างที่ 2

หามัธยฐานอายุ (เดือน) ของแมว 6 ตัว ดังนี้

25 10 13 9 12 15

วิธีทำ

เรียงลำดับอายุของแมวจากมากไปน้อย

25 15 13 12 10 9

ตำแหน่งของมัธยฐาน คือ $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

$$\begin{aligned} \text{ค่ามัธยฐาน} &= \frac{\text{ค่าที่อยู่ตำแหน่งที่ 3} + \text{ค่าที่อยู่ตำแหน่งที่ 4}}{2} \\ &= \frac{13 + 12}{2} \\ &= \frac{25}{2} \\ &= 12\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น มัธยฐานของอายุแมว 6 ตัวนี้ คือ $12\frac{1}{2}$ เดือน หรือ 1 ปี 15 วัน



แบบฝึกหัดที่ 5

1. เติมจำนวนลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อ	ข้อมูล	ข้อมูลที่อยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด
1)	45 15 20 10 30	30
2)	31 37 43 41 101 39	$\frac{41 + 39}{2} = \frac{80}{2} = 40$
3)	43 45 28 23 27 111 120	_____
4)	53 33 40 70 30 59	_____
5)	23 22.6 43.8 90.5	_____

2. หารัศฐานของความสูง (เซนติเมตร) ของนักฟุตบอลทีมหนึ่ง ซึ่งมีความสูง ดังนี้

153 155 148 140 158 151 149 160 165 152 147

3. หารัศฐานของรายได้ต่อวันของบุคคลที่มีรายได้ ดังนี้

ชื่อ	จำนวนเงิน (บาท)
อาทิตย์	15,000
บพิธ	3,000
จินดา	1,000
ปกรณ์	4,000
สุภา	500
ทวี	2,000

4. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายสินค้าได้ในแต่ละวันของสัปดาห์หนึ่ง ดังนี้ เมื่อหน่วยเป็นบาท

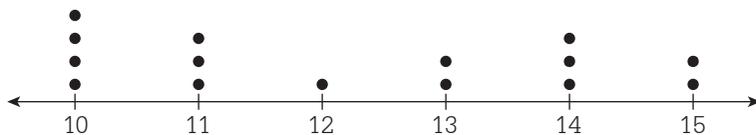
4,500 2,000 1,000 1,750 1,050 500 1,075

หามัธยฐานของรายได้จากการขายสินค้าของร้านค้าแห่งนี้

5. หามัธยฐานของความยาวของใบชาที่เก็บมา 10 ใบ เมื่อหน่วยเป็นมิลลิเมตร ดังนี้

55 79 54 57 64 53 56 82 41 43

6. หามัธยฐานจากแผนภาพจุด



7. หามัธยฐานจากแผนภาพต้น - ใบ

ต้น	ใบ					
5	1	2	3			
6	4	4	6	8	9	
8	0	1	2	2	2	5 6
9	7		7			

8. จากการสำรวจจำนวนหนังสือเป็นเล่มที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของห้องเรียนหนึ่งอ่านเป็นดังนี้

15 45 48 61 38 40 56 45 18 54

63 38 6 25 42 51 34 42 28 39

หามัธยฐานของจำนวนหนังสือที่นักเรียนห้องนี้อ่าน

2.3 ฐานนิยม

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

1. นรณัฐนับจำนวนรถยนต์ที่วิ่งผ่านหน้าบ้านในเช้าวันหนึ่ง จำแนกตามสีได้ ดังนี้

สีขาว	สีแดง	สีฟ้า	สีเหลือง	สีเขียว	สีดำ
๗ ๗ ๒	๗ ๑	๓๓๓	๗ ๓	๗	๗ ๒

จากตารางข้างต้น จะเห็นว่านรณัฐเห็นรถยนต์สีขาวขับผ่านหน้าบ้านในเช้าวันนั้นมากที่สุด เป็นจำนวน 12 คัน ในขณะที่มีรถยนต์สีแดง สีฟ้า สีเหลือง สีเขียว และสีดำ ขับผ่านหน้าบ้านเป็นจำนวน 6, 4, 8, 5 และ 7 คัน ตามลำดับ

2. ดังนั้น รถยนต์สีขาวจึงเป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของรถยนต์สีต่างๆ ที่ขับผ่านหน้าบ้านของนรณัฐ



30 บาท เพราะคนที่นำเงิน
จำนวนนี้มา มีด้วยกัน 6 คน

นักเรียน 15 คน นำเงินมาโรงเรียนเป็นจำนวนเงิน (บาท) ดังนี้
30 30 40 50 30 40 60 27 29 26 30 30 30 20 50
นักเรียนส่วนมากนำเงินมาโรงเรียนกี่บาท



ดังนั้น ฐานนิยม คือ 30 บาท

ฐานนิยม (Mode) คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด หรือค่าของข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด

การพิจารณาฐานนิยม

1. ข้อมูลบางชุดมีฐานนิยมหนึ่งค่า แสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดเพียงข้อมูลเดียว
2. ข้อมูลบางชุดอาจมีฐานนิยมสองค่า เช่น
ข้อมูล 2 2 3 3 3 4 4 5 5 5 8 9 10 10 12
ข้อมูลชุดนี้มีฐานนิยมสองค่า คือ 3 และ 5 ต่างมีความถี่สูงสุดเท่ากับ 3
3. ข้อมูลบางชุดอาจไม่มีฐานนิยม เช่น
1) พิจารณาข้อมูลต่อไปนี้ 2 3 4 6 8 9 12 14 17 20
ข้อมูลชุดนี้ไม่มีฐานนิยม เพราะข้อมูลทุกตัวมีความถี่เท่ากัน คือ มีความถี่เท่ากับ 1

2) พิจารณาข้อมูลต่อไปนี้

2 4 4 4 5 5 6 6 6 7 8 8 9 9 9 10

ข้อมูลชุดนี้มีฐานนิยม คือ 4, 6 และ 9 มีความถี่สูงสุดเท่ากัน คือ มีความถี่เท่ากับ 3 กรณีที่มีความถี่เท่ากันมากกว่า 3 รายการ กล่าวได้ว่าข้อมูลชุดนี้ไม่มีฐานนิยม

ตัวอย่าง

หาฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

1) 20 20 30 90 90 85 26 20 33 20 40 20

2) 51 63 90 50 10 70 80 100

3) 45 30 50 63 28 12 45 28 30 91 63 30 52 52 45 50

วิธีทำ

1) เรียงข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด

20 20 20 20 20 26 30 33 40 85 90 90

ข้อมูลที่มีความถี่สูงที่สุด คือ 20

ดังนั้น ฐานนิยม คือ 20

2) เรียงข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด

10 50 51 63 70 80 90 100

ข้อมูลทุกตัวมีความถี่เท่ากัน

ดังนั้น ข้อมูลชุดนี้ไม่มีฐานนิยม

3) เรียงข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด

12 28 28 30 30 30 45 45 45 50 50 52 52 63 63 91

ข้อมูลที่มีความถี่สูงที่สุด คือ 30 และ 45

ดังนั้น ฐานนิยม คือ 30 และ 45

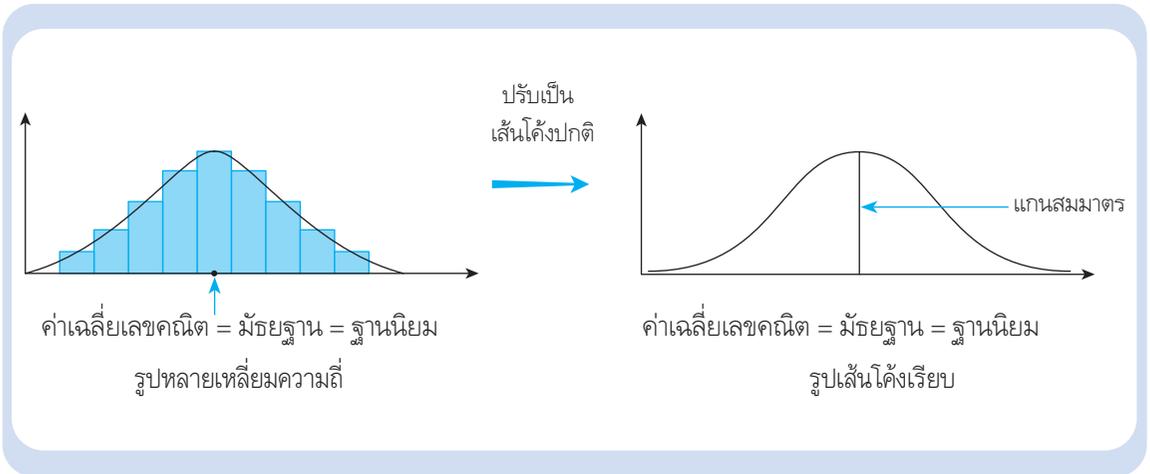


ค่ากลางของข้อมูล (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม)

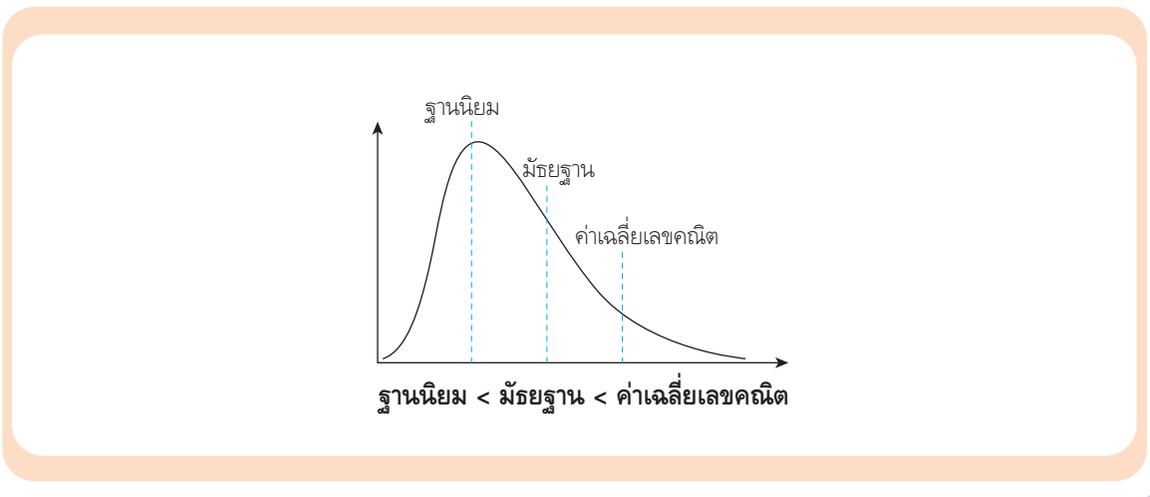
1. การเลือกใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางของข้อมูล เมื่อข้อมูลนั้นไม่มีค่าของข้อมูลใดที่สูงหรือต่ำผิดปกติ หรือกล่าวได้ว่า ข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน
2. การเลือกใช้มัธยฐานเป็นค่ากลางของข้อมูล เมื่อข้อมูลแต่ละค่าต่างกันมาก นั่นคือ มีค่าใดค่าหนึ่งสูงหรือต่ำผิดปกติ ไม่เกาะกลุ่มกัน
3. ฐานนิยมเหมาะที่จะใช้กับข้อมูลเชิงคุณภาพมากกว่าข้อมูลเชิงปริมาณ

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

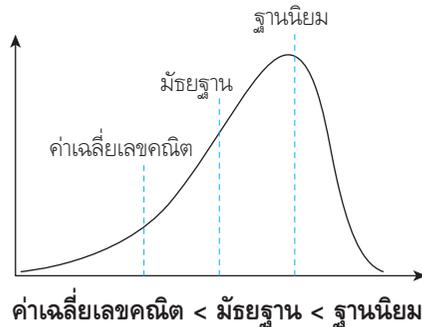
1. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปในฮิสโทแกรม จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น ถ้าปรับรูปหลายเหลี่ยมให้เป็นเส้นโค้งที่เรียบและไม่เป็นเหลี่ยม พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทั้งหมด จะแทนพื้นที่ของค่าจากการสังเกตทั้งหมด ถ้าลักษณะเส้นโค้งที่ปรับไม่มีความเบ้ มีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ เราเรียกเส้นโค้งนี้ว่า **เส้นโค้งปกติ** และเรียกการแจกแจงของข้อมูลที่ทำให้เกิดเส้นโค้งปกติว่า **การแจกแจงปกติ** ดังรูป



2. กราฟฮิสโทแกรมมีแท่งสี่เหลี่ยมที่สูงที่สุดอยู่ทางซ้ายของจุดกึ่งกลางของเส้นโค้งความถี่และแท่งอื่น ๆ อยู่ต่ำกว่าแท่งที่สูงที่สุดลดหลั่นลงไป เส้นโค้งความถี่ที่เกิดจากรูปฮิสโทแกรมแบบนี้จะมีจำนวนข้อมูลอยู่ทางซ้ายมากกว่าทางขวา เส้นโค้งความถี่จะมีจุดสูงสุดก่อนไปทางซ้าย และค่อยเบ้ไปทางขวา จะเรียกว่า **เส้นโค้งความถี่เบ้ไปทางบวก (Positively Skewed Curve)** หรืออาจเรียกง่าย ๆ ว่า **เบ้ลาดทางขวาหรือเบ้ลาดทางบวก** ดังรูป



3. กราฟฮิสโทแกรมมีแท่งสี่เหลี่ยมที่สูงที่สุดอยู่ทางขวาของจุดกึ่งกลางของเส้นโค้งความถี่และแท่งอื่น ๆ อยู่ต่ำกว่าแท่งที่สูงที่สุดลดหลั่นลงไป เส้นโค้งความถี่ที่เกิดจากฮิสโทแกรมแบบนี้จะมีจำนวนข้อมูลอยู่ทางขวามากกว่าทางซ้าย เส้นโค้งความถี่จะมีจุดสูงสุดก่อนไปทางขวา และค่อยเบี่ยงไปทางซ้าย จะเรียกว่า เส้นโค้งความถี่เบี่ยงไปทางลบ (Negatively Skewed Curve) หรืออาจเรียกง่าย ๆ ว่า **เบ้ลาดทางซ้ายหรือเบ้ลาดทางลบ** ดังรูป



แบบฝึกหัดที่ 6

1. หาฐานนิยมของอุณหภูมิเป็นองศาเซลเซียสที่วัดได้ ดังนี้

33 34 35 33 40 33 34 37 39

2. หาฐานนิยมของน้ำหนักเป็นกิโลกรัมของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ดังนี้

50 49 51 55 53 56 54 48 52

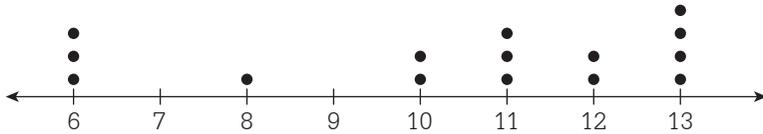
3. หาฐานนิยมของอายุของสมาชิกในครอบครัวหนึ่งซึ่งมีอายุ ดังนี้

11 ปี 70 ปี 68 ปี 32 ปี 35 ปี 11 ปี

4. หาฐานนิยมของความสูงเป็นเซนติเมตรของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ดังนี้

153 155 148 140 153 151 148 160 155 152 148 151

5. หาฐานนิยมจากแผนภาพจุด



6. หาฐานนิยมจากแผนภาพต้นไม้ - ใบ

ต้น	ใบ			
4	1	2	3	
5	5	6	6	7 8
6	0	1	2 2	2 3
7	4	5	9	

7. หาฐานนิยมจากการสอบซึ่งมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน นักเรียนจำนวน 25 คน สอบได้คะแนน ดังนี้

64 67 65 75 71 80 67 82 90 81 76 80 48
52 73 51 80 48 60 53 71 53 40 72 70

3. การแปลความหมายผลลัพธ์และการนำไปใช้

การแปลความหมายของผลลัพธ์นั้น ขึ้นอยู่กับขั้นตอนกระบวนการการดำเนินการทางสถิติ เริ่มตั้งแต่การสร้างคำถามทางสถิติ การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งกระบวนการที่ได้มานั้นอาจมีความคลาดเคลื่อนทางสถิติ เช่น การเก็บรวบรวมข้อมูล อาจได้ข้อมูลไม่ตรงกับข้อเท็จจริง มีความลำเอียงในการเก็บรวบรวมข้อมูล หรือมีความผิดพลาดในการบันทึกข้อมูล การนำเสนอข้อมูล อาจมีการนำเสนอข้อมูลผิดความเป็นจริง หรือนำเสนอข้อมูลแล้วทำให้ผู้ใช้เกิดความเข้าใจผิด การวิเคราะห์ข้อมูลอาจมีการใช้สถิติไม่เหมาะสมกับข้อมูล อาจมีการเลือกใช้ค่ากลางไม่ตรงกับข้อมูล ดังนั้น การแปลความหมายของผลลัพธ์ อาจมีการอ่านข้อมูลที่นำเสนอผิดความจริง หรือมีการตีความเกินจริง ผู้แปลความหมายควรพิจารณาให้รอบด้าน

การแปลความหมายข้อมูล (Interpreting Data) เป็นการแปลความหมายผลการวิเคราะห์ที่ได้ และเชื่อมโยงผลการวิเคราะห์นั้นกับคำถามที่สร้างไว้ในตอนต้น โดยคำถามที่ใช้ในทางสถิติที่เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการคิดวิเคราะห์ที่แตกต่างกัน มี 4 แบบ ดังนี้

1. คำถามที่ประเมินสมรรถนะในเชิงการทำงานตามขั้นตอน
2. คำถามที่ประเมินความเข้าใจเชิงมโนทัศน์
3. คำถามที่ประเมินความคิดเชิงสถิติ
4. คำถามที่ประเมินกระบวนการแก้ปัญหาทางสถิติ

การแปลความหมายของผลลัพธ์ ขึ้นอยู่กับคำถามที่ตั้งไว้ การนำเสนอข้อมูลในรูปแบบใด แล้วใช้สถิติใดในการวิเคราะห์ข้อมูล

ตัวอย่างการใช้ค่ามัธยฐานของข้อมูลในชีวิตประจำวัน เช่น การหาค่ากลางของรายได้ของประชากร ควรใช้ค่ากลางชนิดนี้เพราะจำนวนผู้มีรายได้น้อยมีมากกว่าจำนวนผู้มีรายได้มาก และผู้มีรายได้นั้น รายได้ค่อนข้างสูง สมมุติว่ามีคน 7 คน แต่ละคนมีรายได้ต่อปี ดังนี้

3,000,000 บาท 24,000 บาท 35,000 บาท 18,000 บาท 50,000 บาท 32,000 บาท และ 40,000 บาท

ผลบวกของรายได้ของทั้งเจ็ดคนเท่ากับ

$$3,000,000 + 24,000 + 35,000 + 18,000 + 50,000 + 32,000 + 40,000 = 3,199,000 \text{ บาท}$$

$$\text{รายได้เฉลี่ยของทั้งเจ็ดคน} = \frac{3,199,000}{7} = 457,000 \text{ บาท}$$

เรียงข้อมูลข้างต้นจากมากไปน้อย

3,000,000 50,000 40,000 35,000 32,000 24,000 18,000

จะเห็นว่ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ คือ 35,000 บาท ซึ่งเป็นตัวแทนดีกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ค่ากลางของรายได้ของทั้งเจ็ดคน คือ 35,000 บาท

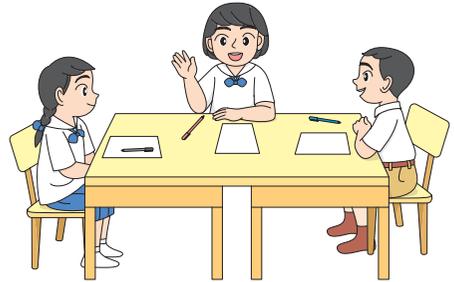
ดังนั้น มัธยฐานจึงเป็นค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลที่มีค่าแตกต่างกันมาก

กิจกรรม

การนำเสนอข้อมูลในรูปแบบที่เหมาะสม

นักเรียนแต่ละคนสอบถามเพื่อนนักเรียน 10 คน เกี่ยวกับข้อมูลต่อไปนี้

1. เงินออมของนักเรียนที่เหลือจากการใช้จ่ายเงินในการมาโรงเรียนตั้งแต่วันจันทร์ถึงวันศุกร์เป็นเวลา 5 วัน
2. ขนาดรองเท้าที่นักเรียนสวม
3. ความสูงของนักเรียน
4. สีที่นักเรียนชอบ



นักเรียนจะนำเสนอข้อมูลในแต่ละข้อด้วยค่ากลางอะไร และคำนวณค่ากลางของข้อมูล

1. เงินออมของนักเรียนที่เหลือจากการใช้จ่ายเงินในการมาโรงเรียนตั้งแต่วันจันทร์ถึงวันศุกร์เป็นเวลา 5 วัน

2. ขนาดรองเท้าที่นักเรียนสวม

3. ความสูงของนักเรียน

4. สีที่นักเรียนชอบ

1. เขียน ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้อง และเขียน X หน้าข้อความที่ผิด

- _____ 1) ในข้อมูลชุดเดียวกัน ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม ย่อมเป็นค่าเดียวกัน
- _____ 2) ฐานนิยมของข้อมูลชุดใดชุดหนึ่งอาจมีมากกว่า 1 ค่าก็ได้
- _____ 3) ถ้ามีข้อมูล 101 ตัว มัธยฐานจะเป็นตำแหน่งที่ 51 เมื่อเรียงข้อมูลจากมากไปน้อย หรือเรียงจากน้อยไปมาก
- _____ 4) ถ้ามีข้อมูล 10 ตัว มัธยฐาน คือ ข้อมูลตัวที่ 5 และ 6
- _____ 5) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 3 ตัว หาได้จาก $\frac{\text{ข้อมูลตัวที่ 1} + \text{ข้อมูลตัวที่ 2}}{2}$
- _____ 6) ข้อมูล 13 14 17 10 11 เป็นข้อมูลที่ไม่มีฐานนิยม
- _____ 7) ข้อมูล 12 13 10 6 15 มีมัธยฐาน คือ 10
- _____ 8) นักเรียน 5 คน มีอายุ 12 ปี จำนวน 3 คน และอายุ 14 ปี จำนวน 2 คน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 ปี
- _____ 9) คนงาน 4 คน มีความสูง 162 เซนติเมตร จำนวน 3 คน และอีก 1 คน สูง 167 เซนติเมตร ข้อมูลนี้มีมัธยฐานและฐานนิยมเท่ากัน
- _____ 10) ถ้ามีข้อมูลเพียง 3 ตัว จะไม่สามารถหาฐานนิยมได้

2. เติมคำตอบลงในช่องว่าง

1) นักเรียนกลุ่มหนึ่งมีน้ำหนักเป็นหน่วยกิโลกรัม ดังนี้

32 37 35 38 42 39

- (1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต _____
- (2) มัธยฐาน _____
- (3) ฐานนิยม _____

2) นักเรียนห้องหนึ่งสอบภาษาไทยได้คะแนน ดังนี้

นักเรียน 5 คน ได้คะแนนคนละ 35 คะแนน

นักเรียน 15 คน ได้คะแนนคนละ 41 คะแนน

นักเรียน 25 คน ได้คะแนนคนละ 45 คะแนน

- (1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต _____
- (2) มัธยฐาน _____
- (3) ฐานนิยม _____

3) อายุ (ปี) ของนักท่องเที่ยว 9 คน เป็นดังนี้

37 48 52 45 48 39 41 48 50

(1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต _____

(2) มัธยฐาน _____

(3) ฐานนิยม _____

4) ในช่วงปิดภาคเรียนเด็กชายเก่งรับจ้างขายสินค้าในห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งเป็นเวลา 30 วัน 7 วันแรกเขาได้ค่าจ้างวันละ 100 บาท อีก 10 วันต่อมาได้ค่าจ้างวันละ 120 บาท นอกนั้นได้ค่าจ้างวันละ 150 บาท

(1) เด็กชายเก่งได้ค่าจ้างเฉลี่ยวันละ _____ บาท

(2) มัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ คือ _____ บาท

(3) ส่วนใหญ่เด็กชายเก่งได้ค่าจ้างวันละ _____ บาท

5) ในการขายเสื้อผ้า 4 วัน ของนายรักษ์ มีรายได้ดังนี้

วันที่ 1 ได้เงิน 35,000 บาท

วันที่ 2 ได้เงิน 27,500 บาท

วันที่ 3 ได้เงิน 32,500 บาท

วันที่ 4 ได้เงิน 40,600 บาท

(1) เฉลี่ยแล้วนายรักษ์ขายเสื้อผ้าได้วันละ _____ บาท

(2) มัธยฐาน _____

(3) ฐานนิยม _____

3. หากค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

40 51 72 80 46 53 87 75 56 40

แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

24 - 30	ดีมาก
21 - 23	ดี
18 - 20	พอใช้
ต่ำกว่า 18	ควรปรับปรุง

ฉันได้ คะแนน

ตอนที่ 1 ระบายวงกลมตัวเลือกที่เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ① ② ③ หรือ ④ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. ข้อใดแสดงแผนภาพต้น - ใบของข้อมูลต่อไปนี้ได้ถูกต้อง

59 42 47 53 43 42 38 55 53 50 61 42 41 60 57

①

ต้น	ใบ
3	8
4	1 2 2 2 3 7
5	0 3 3 5 7 9
6	0 1

②

ต้น	ใบ
3	8
4	1 2 2 3 3 7
5	0 3 3 5 7 9
6	0 1

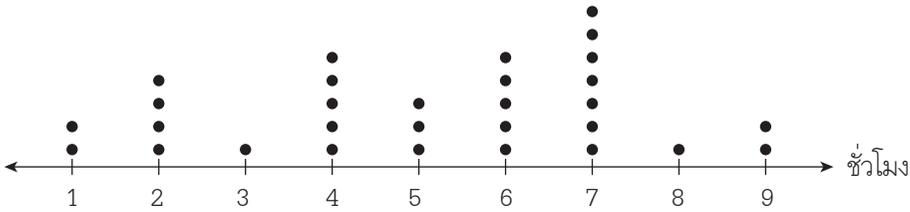
③

ต้น	ใบ
3	8
4	1 2 2 2 3 7
5	0 3 3 3 7 9
6	0 1

④

ต้น	ใบ
3	8
4	1 2 2 3 3 7
5	0 3 3 3 7 9
6	0 1

2. หาฐานนิยมจากแผนภาพจุดที่แสดงเวลา (ชั่วโมง) ที่คนกลุ่มหนึ่งใช้ในการอ่านหนังสือ เพื่อความเพลิดเพลินในเวลา 1 สัปดาห์



- ① 4 ชั่วโมง
- ② 6 ชั่วโมง
- ③ 7 ชั่วโมง
- ④ 9 ชั่วโมง

3.

ต้น	ใบ
2	1
3	0 0 4 4 7 8
5	0 2 2 2 2 3 3

จากแผนภาพต้น - ใบ มี 52 กี่จำนวน

- ① 3 จำนวน
- ② 4 จำนวน
- ③ 5 จำนวน
- ④ 6 จำนวน

ใช้แผนภาพต้น - ใบ ตอบคำถามข้อ 4.-5.

ต้น	ใบ
4	3 7
5	0 6
6	0 4 5
7	2 5
8	7 7 8
9	2 5
10	0

4. มีจำนวนข้อมูลทั้งหมดเท่ากับข้อใด

- ① 15 จำนวน
- ② 18 จำนวน
- ③ 20 จำนวน
- ④ 22 จำนวน

ตอนที่ 3 แสดงวิธีทำ (ข้อละ 5 คะแนน)

1. จำนวนหนังสือ (เล่ม) ที่นักเรียนยืมจากห้องสมุดของโรงเรียนแห่งหนึ่งในเวลา 1 เดือน เป็นดังนี้

7 0 1 4 2 3 5 5 6 0

3 1 7 3 4 1 5 1 7 2

7 3 4 2 5 4 7 2 3 7

เขียนแผนภาพจุดแสดงจำนวนนักเรียนที่ยืมหนังสือจากห้องสมุด และพยากรณ์ว่าจำนวนนักเรียนที่ยืมหนังสือจากห้องสมุดมากกว่า 4 เล่ม มีกี่คน

2. จากการชั่งน้ำหนักผลส้ม (กรัม) แต่ละผลมีน้ำหนัก ดังนี้

95 106 112 135 120 105 118 124 105 130

115 128 134 110 126 120 140 98 111 130

สร้างแผนภาพต้น - ใบ แสดงน้ำหนักของผลส้ม และผลส้มที่มีน้ำหนักอย่างน้อย 120 กรัม มีทั้งหมดกี่เปอร์เซ็นต์ของส้มทั้งหมด

2

ความเท่ากันทุกประการ

ตัวชี้วัดปลายทาง

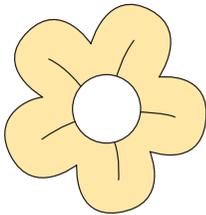
ค.2.2 ม.2/4

ความเท่ากันทุกประการ

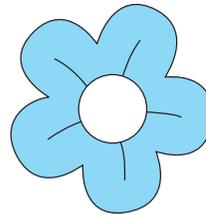
ในชีวิตประจำวันของเรา จะพบเห็นสิ่งของที่เท่ากัน เหมือนกันทั้งขนาด และรูปร่างมากมาย นับไม่ถ้วน การทำกิจกรรม การประกอบกิจการอาชีพต่าง ๆ ต้องอาศัยความเท่ากันของขนาดและรูปร่างมาใช้ในการผลิตสินค้าจำนวนมาก ๆ เพื่อสามารถบริการให้คนทั่วไปได้ใช้ประโยชน์ในการซื้อขาย และการแลกเปลี่ยน เพื่อการอุปโภคและบริโภค สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ อาจเป็นรูปเรขาคณิตหรือไม่ใช่รูปเรขาคณิต ซึ่งเห็นได้มากมายทั่วไป เช่น

ธนบัตรที่มีค่าเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากันและรูปร่างเหมือนกัน ธนบัตรใบละหนึ่งพันบาท เมื่อนำมาวางซ้อนกัน จะทับกันได้สนิทพอดี

ถ้าเป็นสิ่งของที่มีสีต่างกัน แต่มีรูปร่างและขนาดเท่ากัน เช่น ดอกไม้ประดิษฐ์



รูปที่ 1



รูปที่ 2

รูปที่ 1 ดอกไม้สีเหลือง

รูปที่ 2 ดอกไม้สีฟ้า

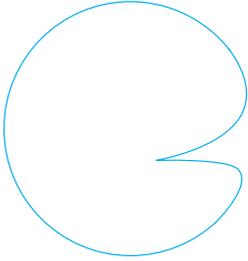
ถ้านำรูปทั้งสองมาวางซ้อนกัน จะทับกันได้สนิทพอดี เมื่อนำไปประกอบเป็นส่วนของดอกไม้ประดิษฐ์ จะได้ดอกไม้ประดิษฐ์สีเหลืองและดอกไม้สีฟ้าที่มีขนาดรูปร่างเท่ากัน



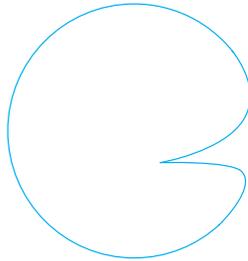
รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อนำรูปหนึ่งซ้อนทับบนอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

จากบทนิยามข้างต้น

ถ้ารูปสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว จะวางซ้อนกันทับกันได้สนิทพอดี หรือถ้ารูปสองรูปวางซ้อนกัน ทับกันได้สนิทพอดีแล้ว รูปสองรูปจะเท่ากันทุกประการ



รูป A



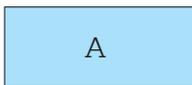
รูป B

นำรูปทั้งสองมาวางซ้อนกัน จะทับกันได้สนิทพอดี แสดงว่า รูป A และรูป B เท่ากันทุกประการ ใช้สัญลักษณ์ \cong แสดงความเท่ากันทุกประการ

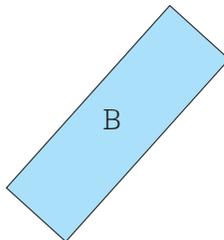
เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า รูป A \cong รูป B

1. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

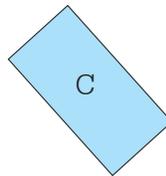
นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้



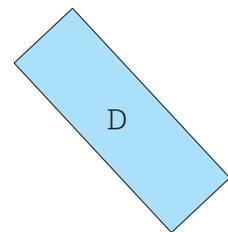
A



B



C



D

นักเรียนจะใช้กระดาษลอกลายลอกรูปแต่ละรูปและนำไปทับกับรูปต่าง ๆ หรือจะใช้วิธีตัดกระดาษนำไปทับกับรูปต่าง ๆ จะพบว่า

- 1) รูป A ซ้อนทับรูป C ได้สนิทพอดี แสดงว่า รูป A \cong รูป C
- 2) รูป B ซ้อนทับรูป D ได้สนิทพอดี แสดงว่า รูป B \cong รูป D



สแกน QR CODE

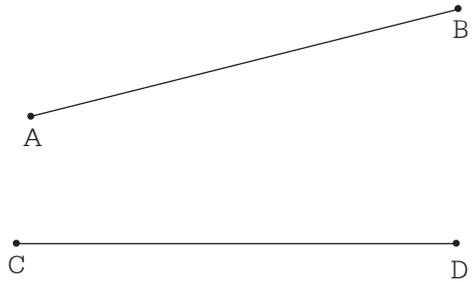


ความเท่ากันทุกประการ

1.1 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

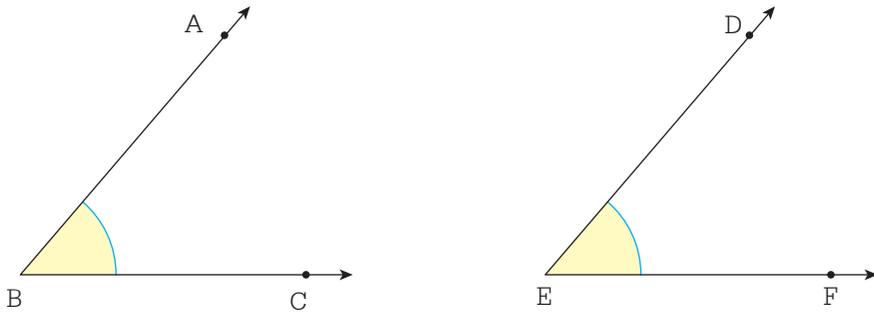
จากบทนิยามความเท่ากันทุกประการ การพิจารณาความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง จะพิจารณาได้จาก

ถ้า \overline{AB} และ \overline{CD} เท่ากันทุกประการแล้ว
จะนำมาวางซ้อนกันและทับกันได้สนิทพอดี
หรือถ้านำ \overline{AB} และ \overline{CD} มาวางซ้อนกัน
จะทับกันได้สนิทพอดี แสดงว่า $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

1.2 ความเท่ากันทุกประการของมุม



ถ้ามุม ABC และมุม DEF วางซ้อนกันได้และทับกันได้สนิทพอดี
แสดงว่า มุม ABC และมุม DEF มีขนาดเท่ากัน



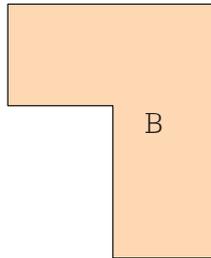
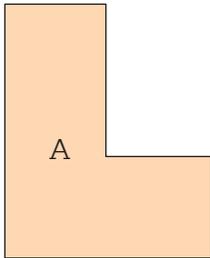
มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน



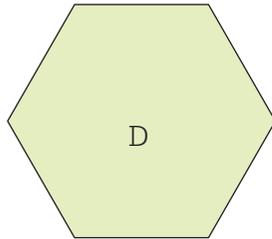
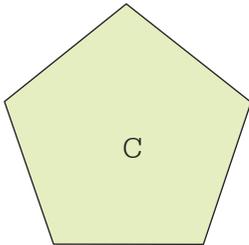
แบบฝึกหัดที่ 1

1. พิจารณารูปที่กำหนดต่อไปนี้ แล้วตอบว่า รูปคู่ใดที่เท่ากันทุกประการ รูปคู่ใดที่ไม่เท่ากันทุกประการ

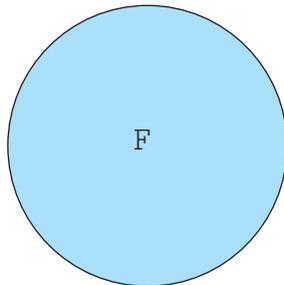
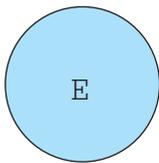
1)



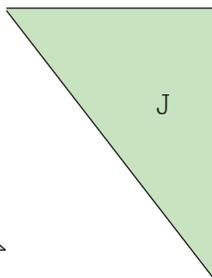
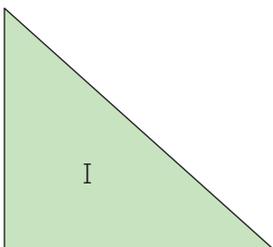
2)



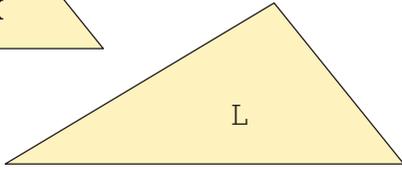
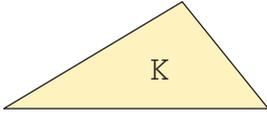
3)



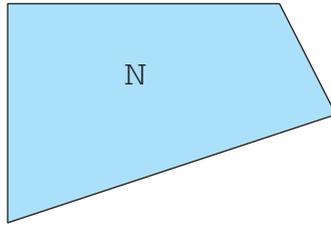
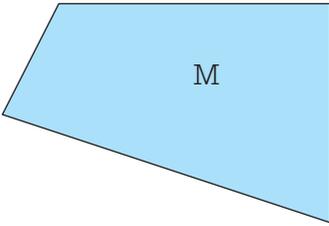
4)



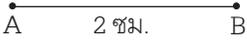
5)



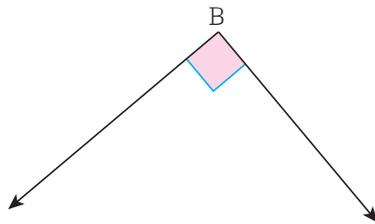
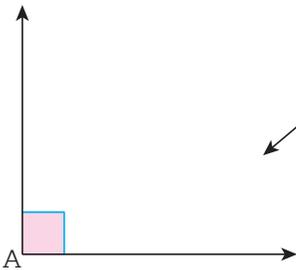
6)



7)

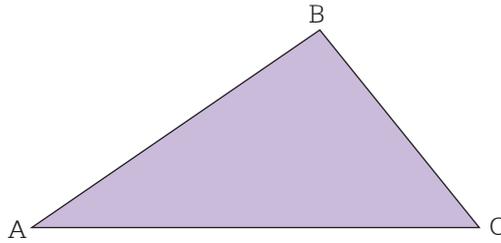


8)



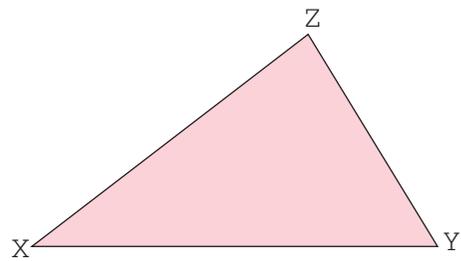
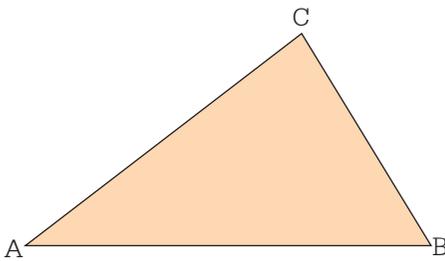
1.3 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC



จากรูป รูปสามเหลี่ยม ABC ประกอบด้วยด้านทั้งสาม คือ \overline{AB} , \overline{BC} และ \overline{CA} ซึ่งเกิดขึ้นจากการเชื่อมต่อด้านจุด A จุด B และจุด C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน \hat{A} \hat{B} และ \hat{C} เป็นมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC

พิจารณา $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$



ตรวจสอบความยาวของด้าน จะได้ว่า

$$AB = YX, BC = YZ \text{ และ } CA = ZX$$

ตรวจสอบขนาดของมุม จะได้ว่า

$$\hat{BCA} = \hat{YZX}, \hat{CAB} = \hat{ZXY} \text{ และ } \hat{ABC} = \hat{XYZ}$$

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ

เรียก ด้านที่ยาวเท่ากันแต่ละคู่ว่าเป็น **ด้านที่สมนัยกัน**

$$\overline{AB} \text{ สมนัยกับ } \overline{XY}$$

$$\overline{BC} \text{ สมนัยกับ } \overline{YZ}$$

$$\overline{CA} \text{ สมนัยกับ } \overline{ZX}$$

ด้านที่สมนัยกัน คือ
ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับ
มุมที่สมนัยกัน



เรียก มุมที่มีขนาดเท่ากันแต่ละคู่ว่าเป็น **มุมที่สมนัยกัน**

$$\hat{CAB} \text{ สมนัยกับ } \hat{ZXY}$$

$$\hat{ABC} \text{ สมนัยกับ } \hat{XYZ}$$

$$\hat{BCA} \text{ สมนัยกับ } \hat{YZX}$$

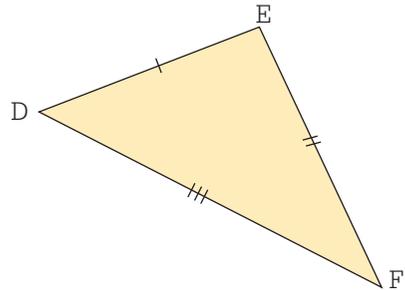
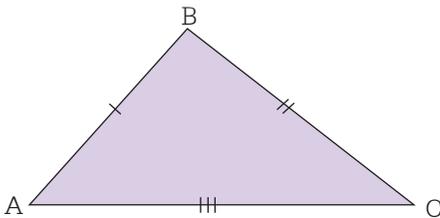
ในทางกลับกัน ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

ตัวอย่าง

กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



เขียนมุมคู่ที่สมนัยกันและด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน

วิธีทำ

พิจารณา $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ จะได้ว่า

เขียนมุมคู่ที่สมนัยกันและด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน ดังนี้

$$\text{มุมสมนัย } \hat{ABC} = \hat{DEF}$$

$$\hat{BCA} = \hat{EFD}$$

$$\hat{CAB} = \hat{FDE}$$

$$\text{ด้านสมนัย } AB = DE$$

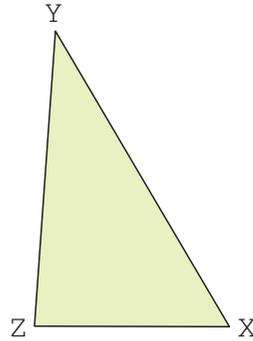
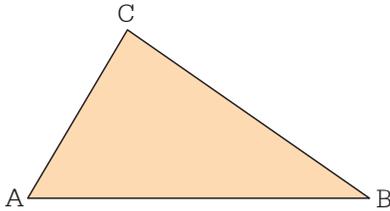
$$BC = EF$$

$$CA = FD$$



แบบฝึกหัดที่ 2

1. จากรูปที่กำหนด รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เขียนด้านที่สมนัยกันและมุมที่สมนัยกันให้ถูกต้อง



\overline{CB} สมนัยกับ _____

\hat{CAB} สมนัยกับ _____

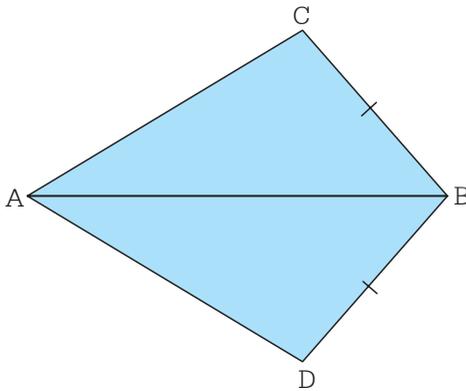
\overline{AC} สมนัยกับ _____

\hat{ABC} สมนัยกับ _____

\overline{BA} สมนัยกับ _____

\hat{BCA} สมนัยกับ _____

2. จากรูปที่กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ เติมข้อความให้ถูกต้อง



$CB =$ _____

$\hat{CAB} =$ _____

$AC =$ _____

$\hat{ABC} =$ _____

$AB =$ _____

$\hat{BCA} =$ _____

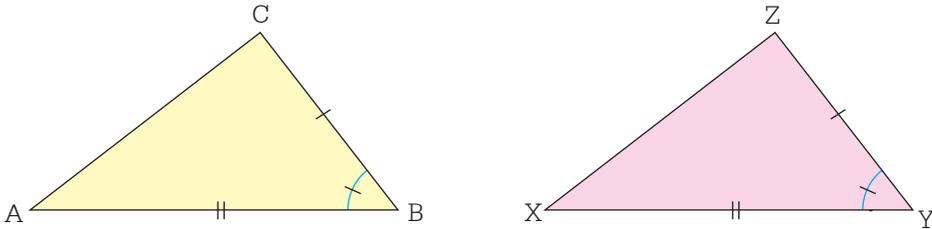
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ

การตรวจสอบการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป โดยอาศัยบทนิยามความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมที่ตรวจสอบการเท่ากันของด้านที่สมนัยกัน 3 คู่ และการเท่ากันของมุมที่สมนัยกันอีก 3 คู่ นั้น ไม่ต้องนำรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมาวางซ้อนกัน แต่ใช้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมใน 3 ลักษณะ ดังนี้

- 1) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน
- 2) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม
- 3) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

2.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ ดังนี้



ทดลองใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความเท่ากันทุกประการหรือไม่

จะได้ $CB = ZY$, $BA = YX$ และ $\hat{A}BC = \hat{X}YZ$

แสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

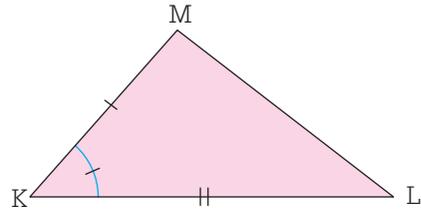
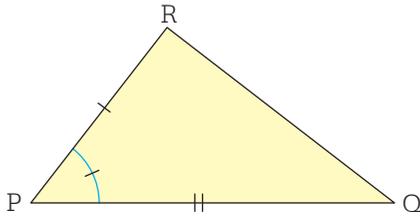
จากรูปสามเหลี่ยมสองรูปข้างต้น เป็นการกำหนดด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันนั้นเป็นมุมระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน เรียก รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบนี้ว่า **ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)** และจะทำให้เกิดผลที่ตามมา คือ ด้านที่สมนัยกันที่เหลืออีก 1 คู่ จะยาวเท่ากัน และมุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 2 คู่ จะมีขนาดเท่ากัน เป็นคู่ ๆ

รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้



ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านที่สมนัยกันยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ เป็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน หรือ ด.ม.ด.

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle PQR \cong \triangle KLM$

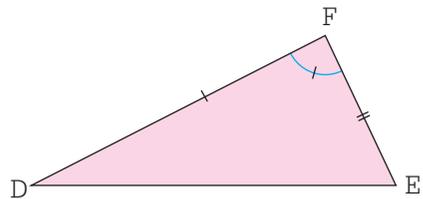
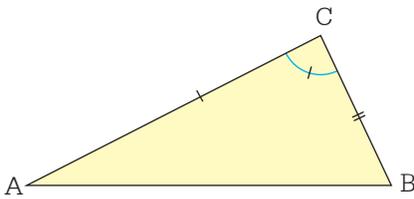


กำหนดให้ $PR = KM$, $QP = LK$ และ $\hat{R}PQ = \hat{M}KL$

ต้องพิสูจน์ว่า $\triangle PQR \cong \triangle KLM$

- พิสูจน์**
- 1) $PR = KM$ (กำหนดให้)
 - 2) $\hat{R}PQ = \hat{M}KL$ (กำหนดให้)
 - 3) $QP = LK$ (กำหนดให้)
 - 4) $\triangle PQR \cong \triangle KLM$ (ด.ม.ด.)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $AB = DE$

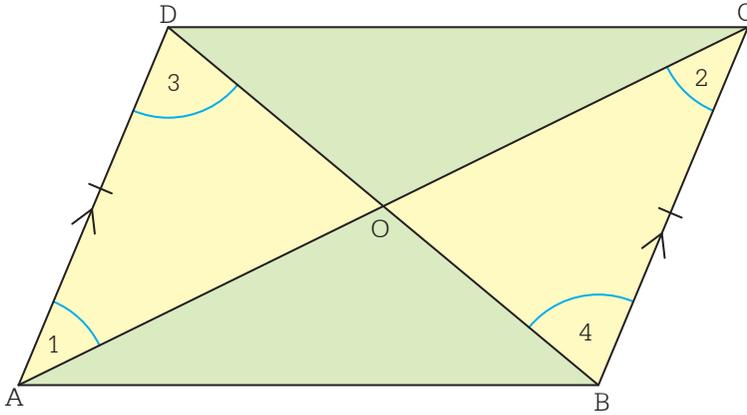


กำหนดให้ $AC = DF$, $CB = FE$ และ $\hat{BCA} = \hat{EFD}$

ต้องพิสูจน์ว่า $AB = DE$

- พิสูจน์**
- 1) $AC = DF$ (กำหนดให้)
 - 2) $\hat{BCA} = \hat{EFD}$ (กำหนดให้)
 - 3) $CB = FE$ (กำหนดให้)
 - 4) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ด.ม.ด.)
 - 5) $AB = DE$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 และเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ดังรูป
 พิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 มีเส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกันที่จุด O
 มี $DO = BO$ และ $OA = OC$

ต้องพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle AOD$ และ $\triangle COB$

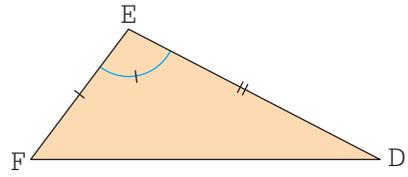
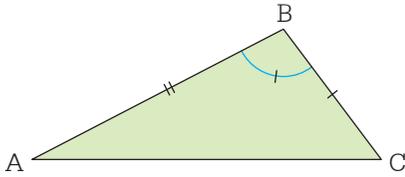
- 1) $DO = BO$ (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน)
- 2) $\hat{AOD} = \hat{COB}$ (มุมตรงข้ามของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)
- 3) $OA = OC$ (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน)
- 4) $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (ด.ม.ด.)
- 5) $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)



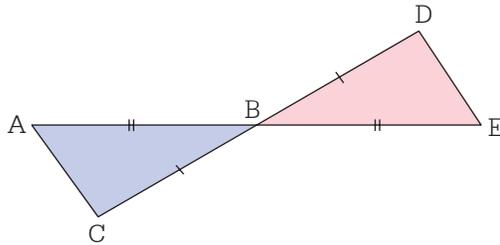
แบบฝึกหัดที่ 3

1. จากรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดที่เท่ากันทุกประการ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน

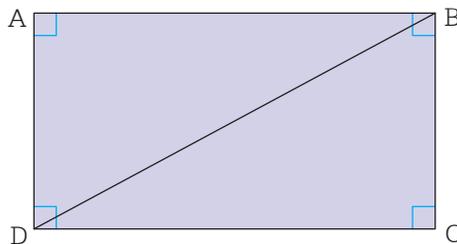
1)



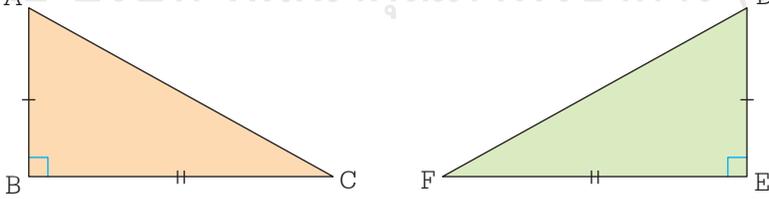
2)



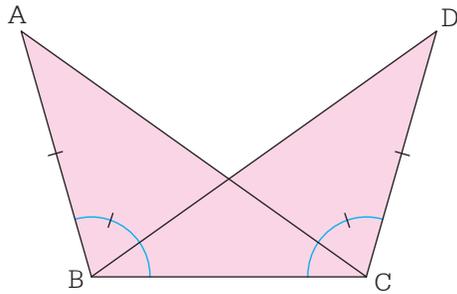
3)



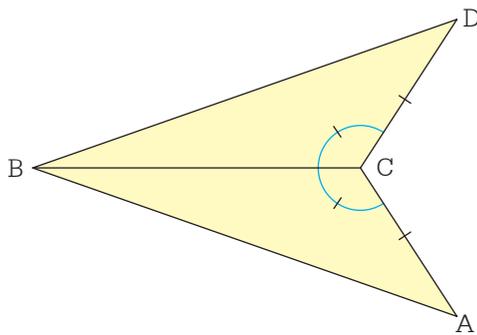
4)



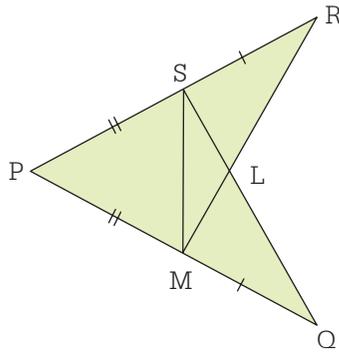
5)



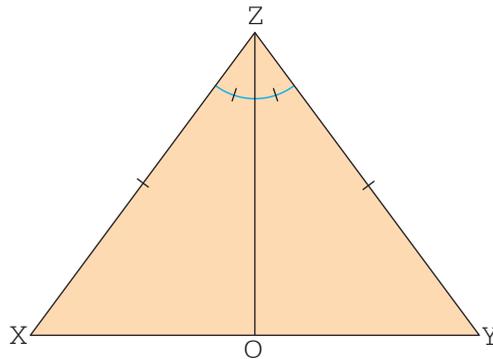
2. จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน



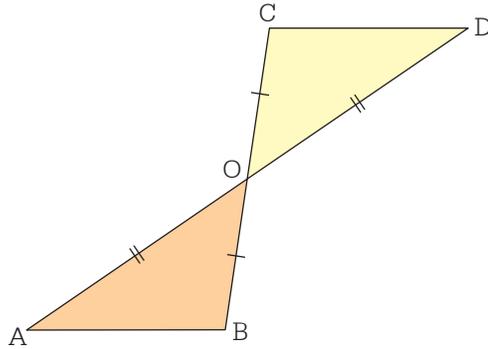
3. จากรูปที่กำหนด $PS = PM$ และ $SR = MQ$ พิสูจน์ว่า $\triangle PQS \cong \triangle PRM$



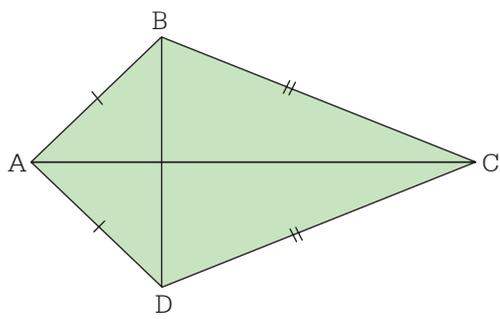
4. จากรูปที่กำหนด $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ \overline{ZO} เป็นส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม พิสูจน์ว่า $XO = YO$



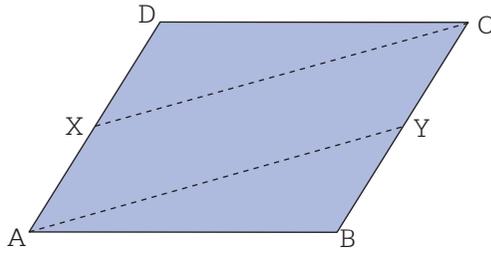
5. จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $AB = DC$



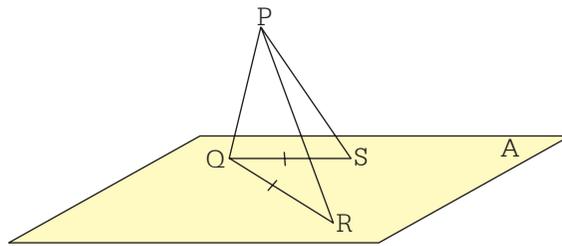
6. กำหนด $\square ABCD$ มี $BA = DA$ และ $CB = CD$ พิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle ADC$
 ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน



7. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีจุด X และจุด Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD และ BC ตามลำดับ พิสูจน์ว่า $\triangle ABY \cong \triangle CDX$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน

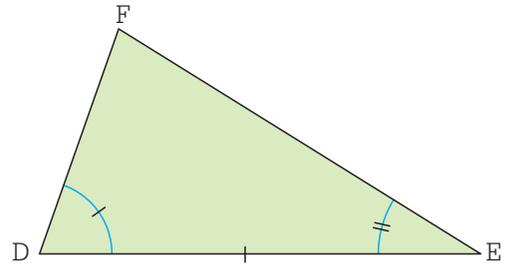
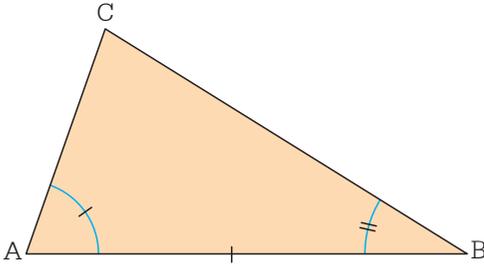


8. จากรูปที่กำหนด จุด Q จุด R และจุด S บนระนาบ A ถ้ากำหนด $QS = QR$ และ $\hat{PQS} = \hat{PQR}$ พิสูจน์ว่า $PS = PR$



2.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากัน 1 คู่ ดังนี้



ทดลองใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีความเท่ากันทุกประการหรือไม่

จะได้ $\hat{C}A\hat{B} = \hat{F}D\hat{E}$, $\hat{A}B\hat{C} = \hat{D}E\hat{F}$ และ $BA = ED$

แสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

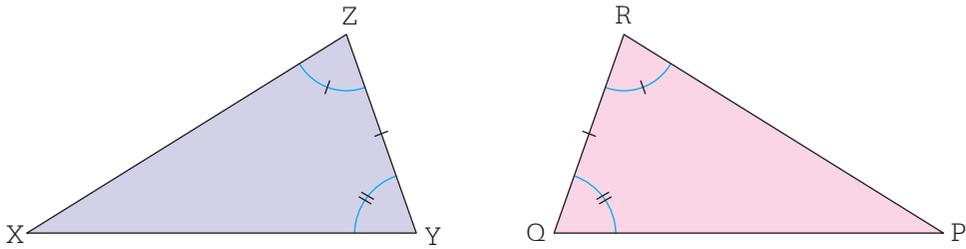
จากรูปสามเหลี่ยมสองรูปข้างต้น เป็นการกำหนดมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ และด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 1 คู่ โดยด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้นเป็นด้านระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน เรียกรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบนี้ว่า **ความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)** และทำให้เกิดผลที่ตามมา คือ มุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 1 คู่ มีขนาดเท่ากัน และด้านคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 2 คู่ จะมีความยาวเท่ากัน เป็นคู่ ๆ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติดังต่อไปนี้



ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่สมนัยกัน มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ เป็นความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม หรือ ม.ด.ม.

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle XYZ \cong \triangle POR$

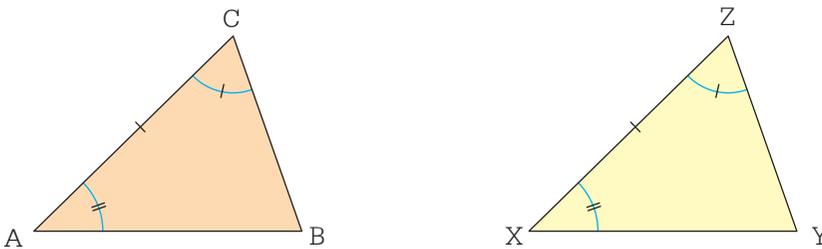


กำหนดให้ $\hat{YZX} = \hat{ORP}$, $\hat{XYZ} = \hat{POR}$ และ $ZY = RO$

ต้องพิสูจน์ว่า $\triangle XYZ \cong \triangle POR$

- พิสูจน์**
- 1) $\hat{YZX} = \hat{ORP}$ (กำหนดให้)
 - 2) $ZY = RO$ (กำหนดให้)
 - 3) $\hat{XYZ} = \hat{POR}$ (กำหนดให้)
 - 4) $\triangle XYZ \cong \triangle POR$ (ม.ด.ม.)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $BA = YX$



กำหนดให้ $\hat{BCA} = \hat{YZX}$, $\hat{CAB} = \hat{ZXY}$ และ $AC = XZ$

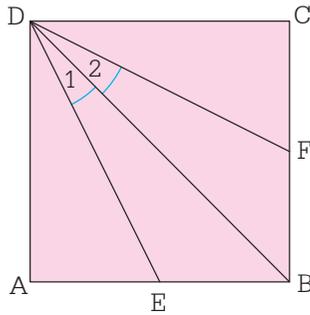
ต้องพิสูจน์ว่า $BA = YX$

- พิสูจน์**
- 1) $\hat{BCA} = \hat{YZX}$ (กำหนดให้)
 - 2) $AC = XZ$ (กำหนดให้)
 - 3) $\hat{CAB} = \hat{ZXY}$ (กำหนดให้)
 - 4) $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ (ม.ด.ม.)
 - 5) $BA = YX$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3

กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี $\hat{1} = \hat{2}$ ดังรูป

พิสูจน์ว่า $BE = BF$



กำหนดให้

$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี \overline{DB} เป็นเส้นทแยงมุม และ $\hat{1} = \hat{2}$

ต้องพิสูจน์ว่า

$BE = BF$

พิสูจน์

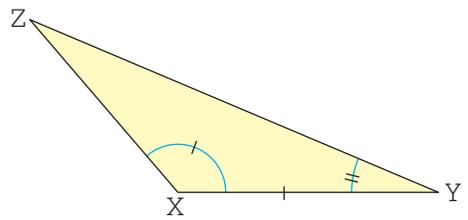
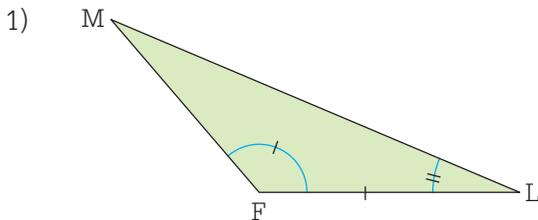
พิจารณา $\triangle EBD$ และ $\triangle FBD$

- 1) $\hat{1} = \hat{2}$ (กำหนดให้)
- 2) $DB = DB$ (\overline{DB} เป็นด้านร่วม)
- 3) $\hat{EBD} = \hat{FBD}$ (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะแบ่งครึ่งมุมฉาก)
- 4) $\triangle EBD \cong \triangle FBD$ (ม.ด.ม.)
- 5) $BE = BF$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)



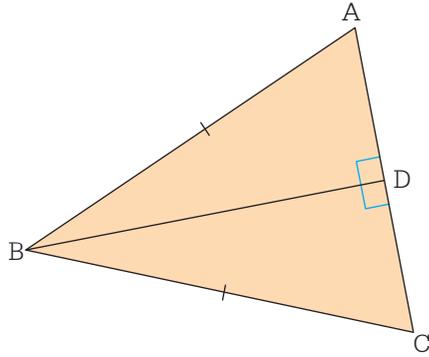
แบบฝึกหัดที่ 4

1. จากรูปที่กำหนด รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เติมข้อความให้ถูกต้อง

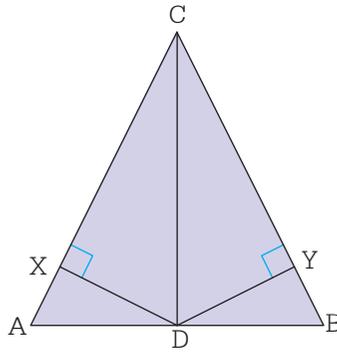


- $\hat{MFL} = \underline{\hspace{2cm}}$ เหตุผล $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\angle F = \underline{\hspace{2cm}}$ เหตุผล $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\hat{FLM} = \underline{\hspace{2cm}}$ เหตุผล $\underline{\hspace{2cm}}$
- $\triangle FLM \cong \triangle XYZ$ เหตุผล $\underline{\hspace{2cm}}$

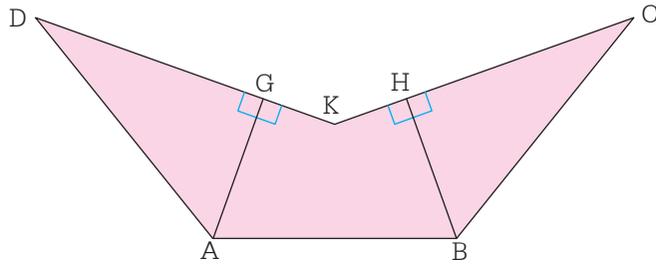
2. จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม



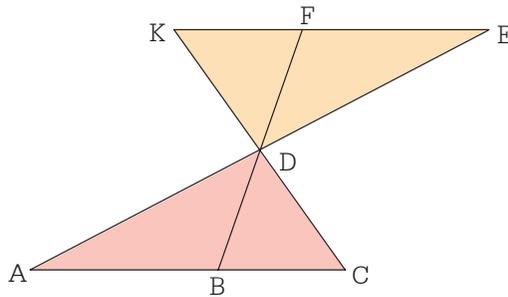
3. จากรูปที่กำหนด \overline{CD} แบ่งครึ่ง \widehat{ACB} มี $\overline{DX} \perp \overline{AC}$ ที่จุด X และ $\overline{DY} \perp \overline{BC}$ ที่จุด Y พิสูจน์ว่า $\triangle XDC \cong \triangle YDC$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม



4. จากรูปที่กำหนด $DG = CH$, $\hat{G}DA = \hat{H}CB$ มี $\overline{AG} \perp \overline{DK}$ และ $\overline{BH} \perp \overline{CK}$ พิสูจน์ว่า $AD = BC$

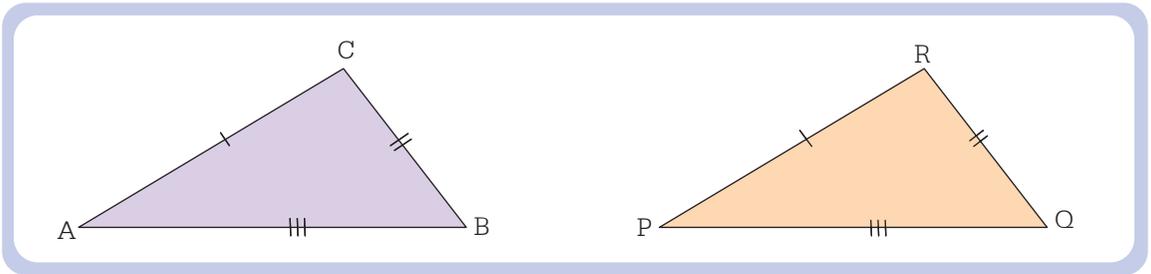


5. จากรูปที่กำหนด $\hat{E}DF = \hat{F}ED$, $\hat{A}DB = \hat{B}AD$ และ $DA = DE$ พิสูจน์ว่า $AB = EF$



2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านที่สมนัยกันยาวเท่ากันสามคู่ ดังนี้



ทดลองใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีความเท่ากันทุกประการหรือไม่

จะได้ $AC = PR$, $CB = RQ$ และ $BA = QP$

แสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

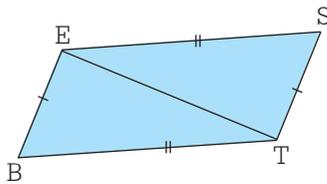
จากรูปสามเหลี่ยมสองรูปข้างต้น เป็นการกำหนดด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากันทั้ง 3 คู่ เรียกรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบนี้ว่า **ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)** และทำให้เกิดผลที่ตามมา คือ มุมคู่ที่สมนัยกัน อีก 3 คู่ จะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้



ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านที่สมนัยกันยาวเท่ากันสามคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการเป็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน หรือ ด.ด.ด.

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle BET \cong \triangle STE$



กำหนดให้ $EB = TS$ และ $BT = SE$

ต้องพิสูจน์ว่า $\triangle BET \cong \triangle STE$

- พิสูจน์
- 1) $EB = TS$ (กำหนดให้)
 - 2) $BT = SE$ (กำหนดให้)
 - 3) $TE = TE$ (\overline{TE} เป็นด้านร่วม)
 - 4) $\triangle BET \cong \triangle STE$ (ด.ด.ด.)

กำหนดให้ $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี \hat{XZY} เป็นมุมยอด \overline{ZO} เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมาแบ่งครึ่ง \overline{XY}

ต้องพิสูจน์ว่า 1) $\hat{1} = \hat{2}$ 2) $\overline{ZO} \perp \overline{XY}$

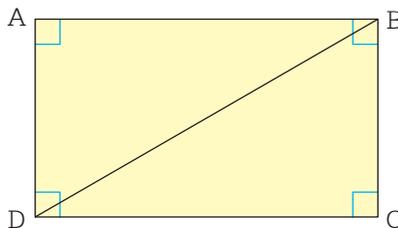
พิสูจน์ พิจารณา $\triangle XOZ$ และ $\triangle YOZ$

- 1) $XZ = YZ$ (ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาวเท่ากัน)
- 2) $XO = OY$ (\overline{ZO} แบ่งครึ่ง \overline{XY})
- 3) $ZO = ZO$ (\overline{ZO} เป็นด้านร่วม)
- 4) $\triangle XOZ \cong \triangle YOZ$ (ด.ด.ด.)
- 5) $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
- 6) $\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$ (มุมตรงมีขนาด 180°)
- 7) $2(\hat{3}) = 180^\circ$ (แทนค่า $\hat{4}$ ด้วย $\hat{3}$)
- 8) $\hat{3} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (จากข้อ 7)
- 9) $\hat{3} = \hat{4} = 90^\circ$ (จากข้อ 8)
- 10) $\overline{ZO} \perp \overline{XY}$ (จากข้อ 9)

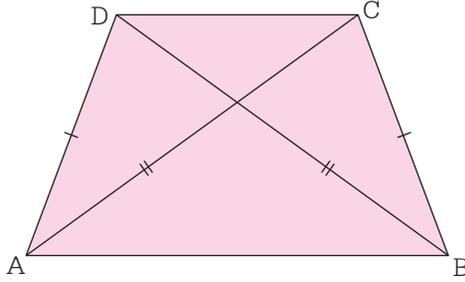


แบบฝึกหัดที่ 5

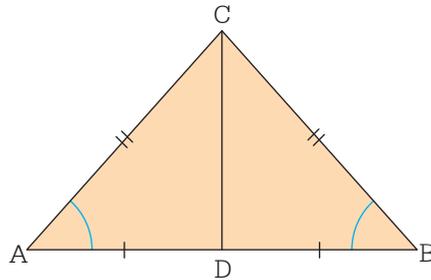
1. จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle DCB$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน



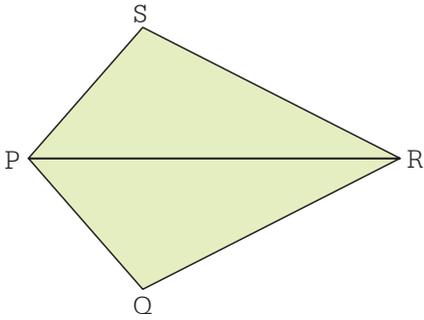
2. จากรูปที่กำหนด $\square ABCD$ มี $DA = CB$ และ $AC = BD$ พิสูจน์ว่า $\hat{ADC} = \hat{BCD}$



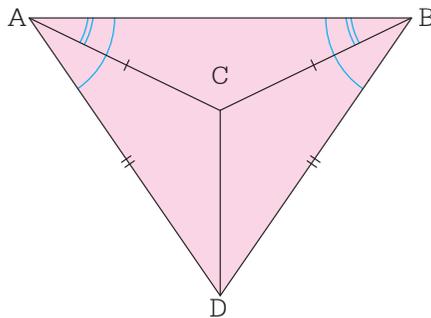
3. จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\hat{CAB} = \hat{CBA}$



4. จากรูปที่กำหนด $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว พิสูจน์ว่า \widehat{SRQ} เป็นสองเท่าของ \widehat{SRP}

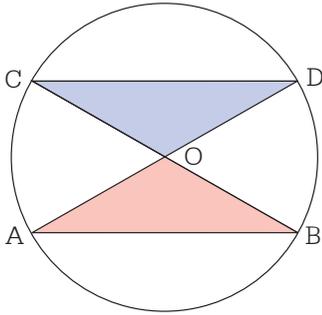


5. จากรูปที่กำหนด $\triangle ABC$ และ $\triangle ABD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พิสูจน์ว่า \widehat{CDA} เป็นครึ่งหนึ่งของ \widehat{ADB}



แบบฝึกหัดท้ายหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

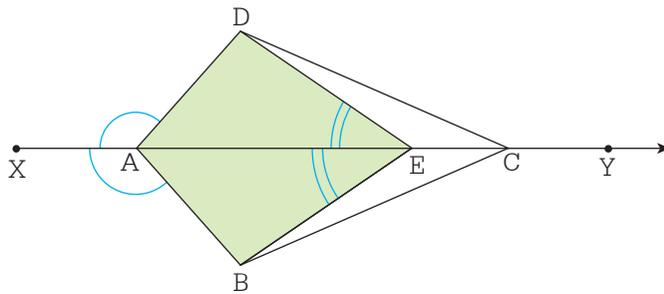
1.



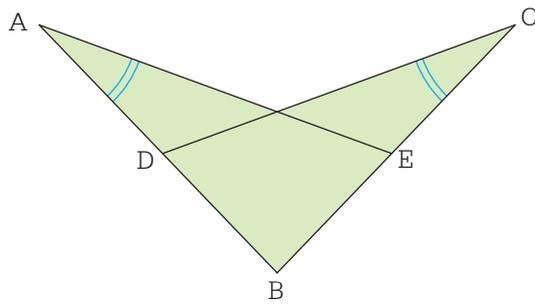
จากรูป กำหนด \overline{AD} และ \overline{BC}
เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
พิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle DOC$

2.

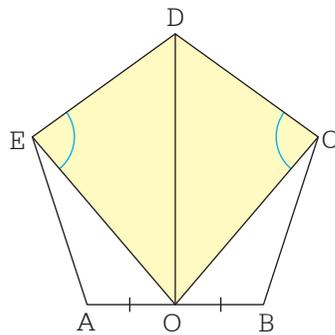
จากรูปที่กำหนด $\hat{XAD} = \hat{XAB}$ และ $\hat{AED} = \hat{AEB}$ พิสูจน์ว่า $\triangle AED \cong \triangle AEB$



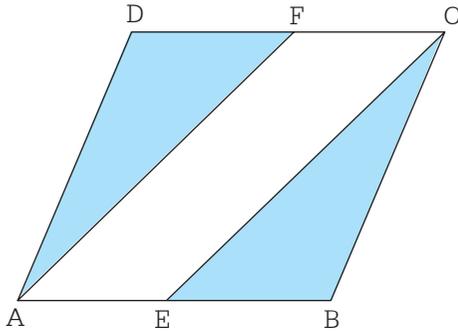
3. จากรูปที่กำหนด $BA = BC$ และ $\hat{EAB} = \hat{DCB}$ พิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CBD$



4. จากรูปที่กำหนด ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยม
ด้านเท่ามุมเท่า และ $OA = OB$
พิสูจน์ว่า $\hat{DEO} = \hat{DCO}$

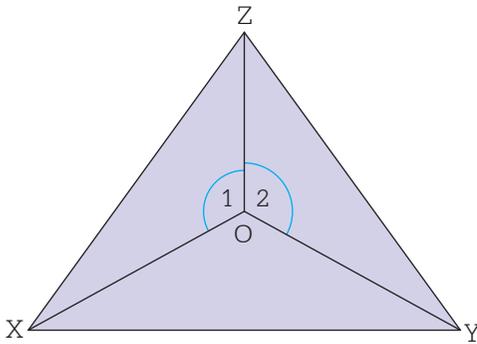


5.



จากรูป กำหนด $\square ABCD$
 เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลาง
 ของด้าน AB และ DC ตามลำดับ
 พิสูจน์ว่า $\triangle AFD \cong \triangle CEB$

6.

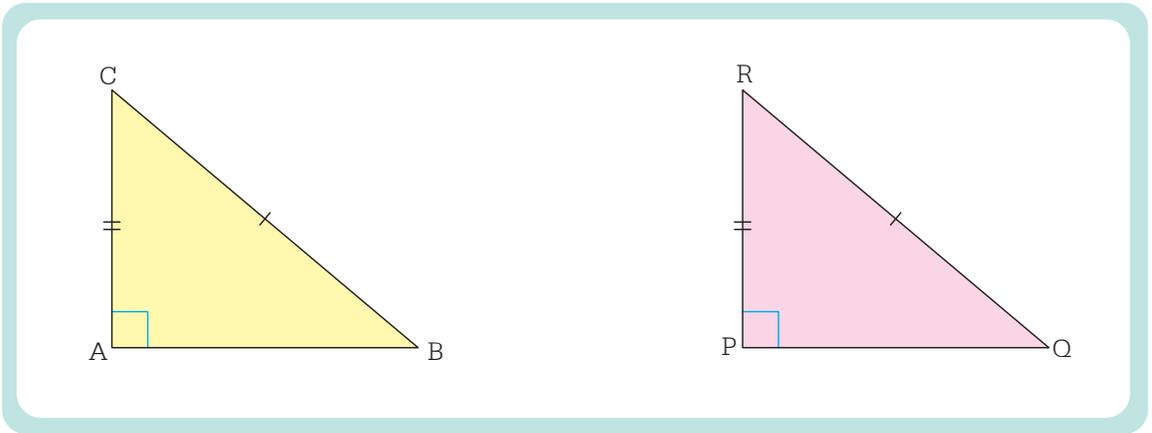


จากรูป กำหนด $\triangle XYZ$ และ $\triangle XYO$
 เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 พิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{2}$

ความรู้เพิ่มเติม

นอกจากการตรวจสอบการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป โดยอาศัยบทนิยามความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมใน 3 ลักษณะ ได้แก่ ด้าน-มุม-ด้าน มุม-ด้าน-มุม ด้าน-ด้าน-ด้าน ยังมีความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมในลักษณะความสัมพันธ์แบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด.) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมหนึ่งมุมเป็นมุมฉาก มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน ดังนี้



ทดลองใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความเท่ากันทุกประการหรือไม่
จะได้ $\hat{CAB} = \hat{RPQ} = 90^\circ$, $CB = RQ$ และ $AC = PR$

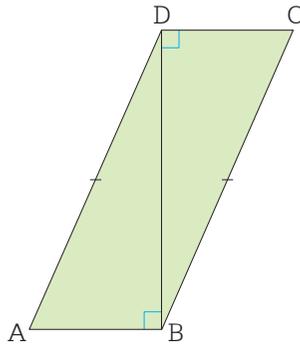
แสดงว่า $\triangle CAB \cong \triangle RPQ$

จากรูปสามเหลี่ยมสองรูปข้างต้น เป็นการกำหนดมุมคู่ที่สมนัยกันเป็นมุมฉาก 1 คู่ และด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ โดยเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก 1 คู่ และเป็นด้านประกอบมุมฉากอีก 1 คู่ เรียกรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบนี้ว่า **ความสัมพันธ์แบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด.)** และทำให้เกิดผลตามมา คือ ด้านประกอบมุมฉากคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 1 คู่ยาวเท่ากัน และมุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 2 คู่มีขนาดเท่ากัน



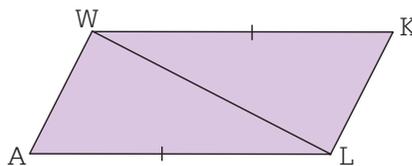
ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันอีกหนึ่งคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ เป็นความสัมพันธ์แบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน หรือ จ.ด.ด.

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด พิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle CDB$



- กำหนดให้ $AD = CB$ และ $\hat{A}BD = \hat{C}DB$ เป็นมุมฉาก
 ต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle CDB$
 พิสูจน์
- 1) $\hat{A}BD = \hat{C}DB = 90^\circ$ (เป็นมุมฉาก)
 - 2) $AD = CB$ (กำหนดให้)
 - 3) $DB = DB$ (\overline{DB} เป็นด้านร่วม)
 - 4) $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (จ.ด.ด.)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนด $\overline{AW} \perp \overline{WL}$ และ $\overline{WL} \perp \overline{KL}$ พิสูจน์ว่า $\hat{W}AL = \hat{L}KW$



- กำหนดให้ $\overline{AW} \perp \overline{WL}$, $\overline{WL} \perp \overline{KL}$ และ $LA = WK$
 ต้องพิสูจน์ว่า $\hat{W}AL = \hat{L}KW$
 พิสูจน์
- 1) $\hat{L}WA = \hat{W}LK = 90^\circ$ ($\overline{AW} \perp \overline{WL}$ และ $\overline{WL} \perp \overline{KL}$)
 - 2) $LA = WK$ (กำหนดให้)
 - 3) $WL = WL$ (\overline{WL} เป็นด้านร่วม)
 - 4) $\triangle WAL \cong \triangle LKW$ (จ.ด.ด.)
 - 5) $\hat{W}AL = \hat{L}KW$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

แบบทดสอบหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

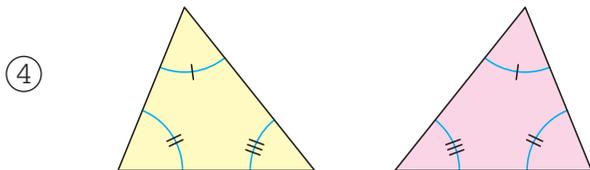
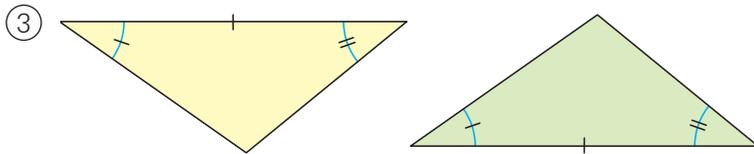
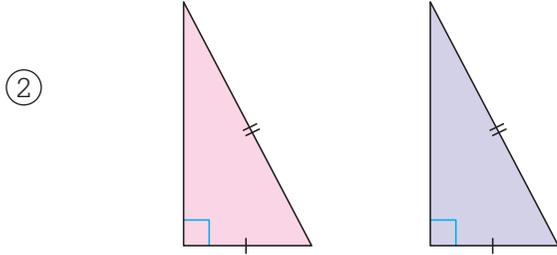
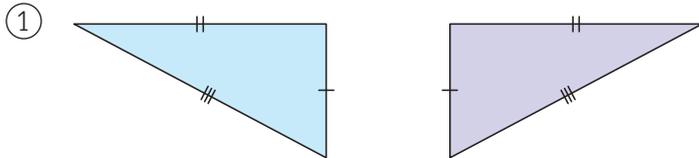
24 - 30	ดีมาก
21 - 23	ดี
18 - 20	พอใช้
ต่ำกว่า 18	ควรปรับปรุง
ฉันได้ <input type="text"/>	คะแนน <input type="text"/>

ตอนที่ 1 ระบายวงกลมตัวเลือกที่เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ① ② ③ หรือ ④ (ข้อละ 1 คะแนน)

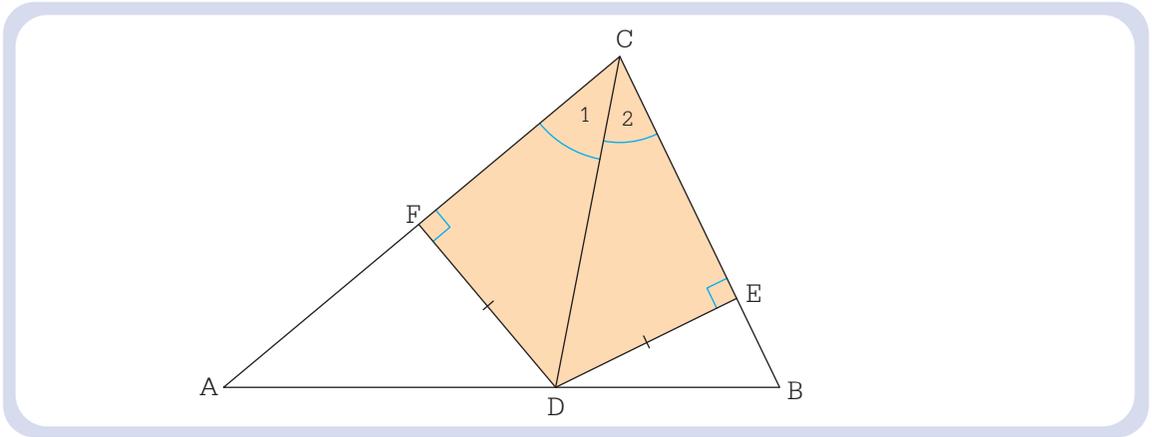
1. กรณีใดที่แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

- ① มีมุมทั้งสามเท่ากันมุมต่อมุม
- ② มีพื้นที่เท่ากัน
- ③ มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน ด้านต่อด้าน
- ④ มีด้านฐานยาวเท่ากัน

2. ข้อใดที่สรุปไม่ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ



จากรูปที่กำหนด ใช้ตอบคำถามข้อ 3.-5.



3. $\triangle CDF \cong \triangle CED$ ด้วยความสัมพันธ์แบบใด

- ① ด้าน-ด้าน-ด้าน
- ② มุม-ด้าน-มุม
- ③ ฉาก-ด้าน-ด้าน
- ④ ด้าน-มุม-ด้าน

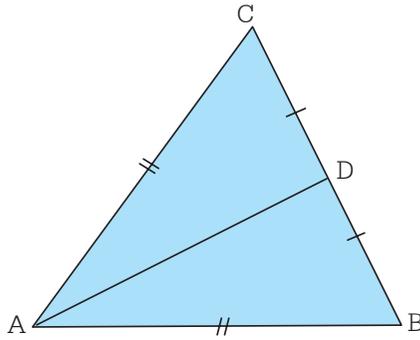
4. $\hat{1} = \hat{2}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

- ① เท่ากัน เพราะ $\triangle CDF \cong \triangle CED$
- ② เท่ากัน เพราะ \overline{CD} แบ่งครึ่ง \hat{ACB}
- ③ เท่ากัน เพราะ $\triangle ADC \cong \triangle DBC$
- ④ ไม่เท่ากัน เพราะ $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$

5. $FC = EC$ เพราะเหตุใด

- ① ด้านที่สมนัยกันของ $\triangle CDF \cong \triangle CED$
- ② ด้านที่สมนัยกันของ $\triangle ADF \cong \triangle DBE$
- ③ กำหนดให้
- ④ เป็นด้านร่วม

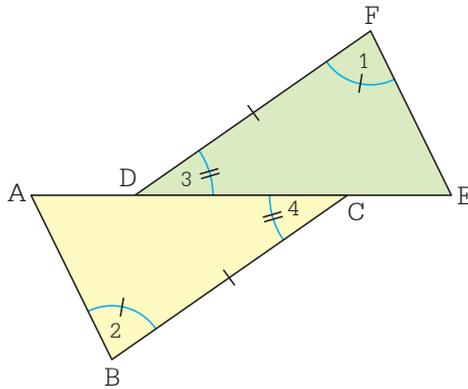
6.



จากรูป $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ด้วยความสัมพันธ์แบบใด

- ① ด้าน-ด้าน-ด้าน
- ② ด้าน-มุม-ด้าน
- ③ มุม-ด้าน-มุม
- ④ ฉาก-ด้าน-ด้าน

7.



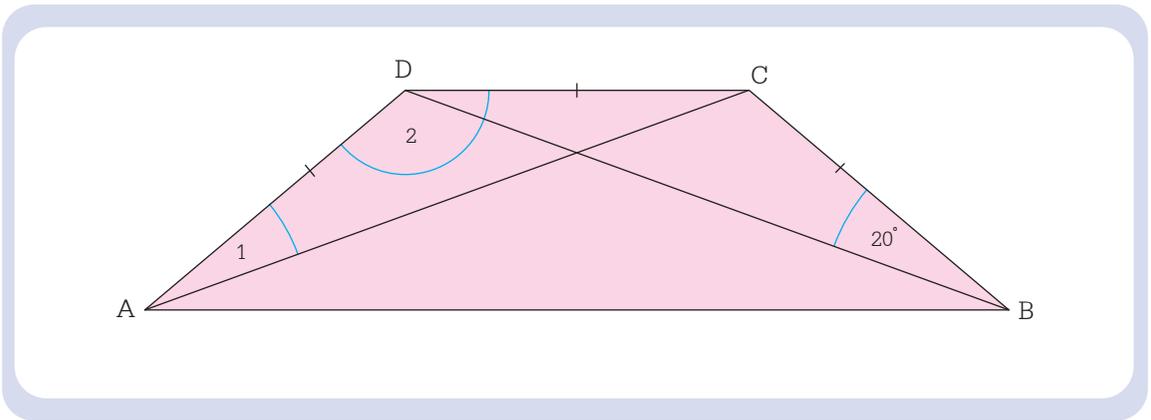
จากรูป กำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูป มี $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ① $\triangle ABC \cong \triangle FED$
- ② $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการกับ $\triangle FED$
- ③ $\hat{CAB} = \hat{DEF}$
- ④ $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$

สงวนลิขสิทธิ์ บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด

จากรูปที่กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และมี $AD = BC = DC$

ใช้ตอบคำถามข้อ 8.-10.



8. ทหาว่า $\hat{1}$ มีขนาดกี่องศา

- ① 20 องศา
- ② 40 องศา
- ③ 140 องศา
- ④ 170 องศา

9. ทหาว่า $\hat{2}$ มีขนาดกี่องศา

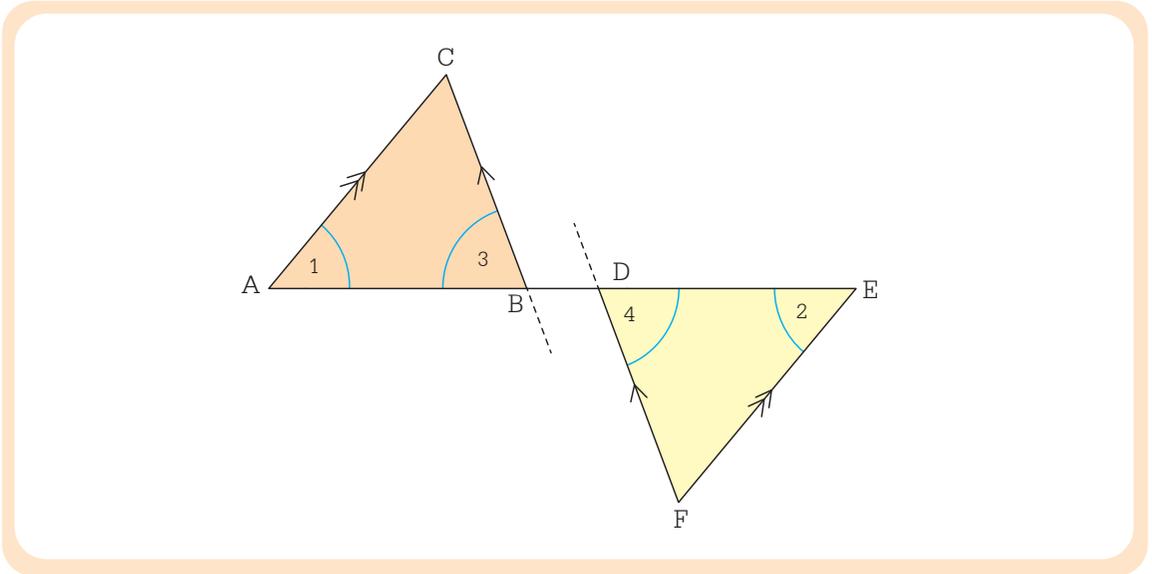
- ① 100 องศา
- ② 120 องศา
- ③ 140 องศา
- ④ 170 องศา

10. $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ ด้วยความสัมพันธ์แบบใด

- ① ด้าน-มุม-ด้าน
- ② มุม-ด้าน-มุม
- ③ ด้าน-ด้าน-ด้าน
- ④ ฉาก-ด้าน-ด้าน

ตอนที่ 2 เติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง (ข้อละ 5 คะแนน)

1. จากรูปที่กำหนด $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$, $\overline{CB} \parallel \overline{FD}$ และ $BA = DE$ พิสูจน์ว่า $CB = FD$



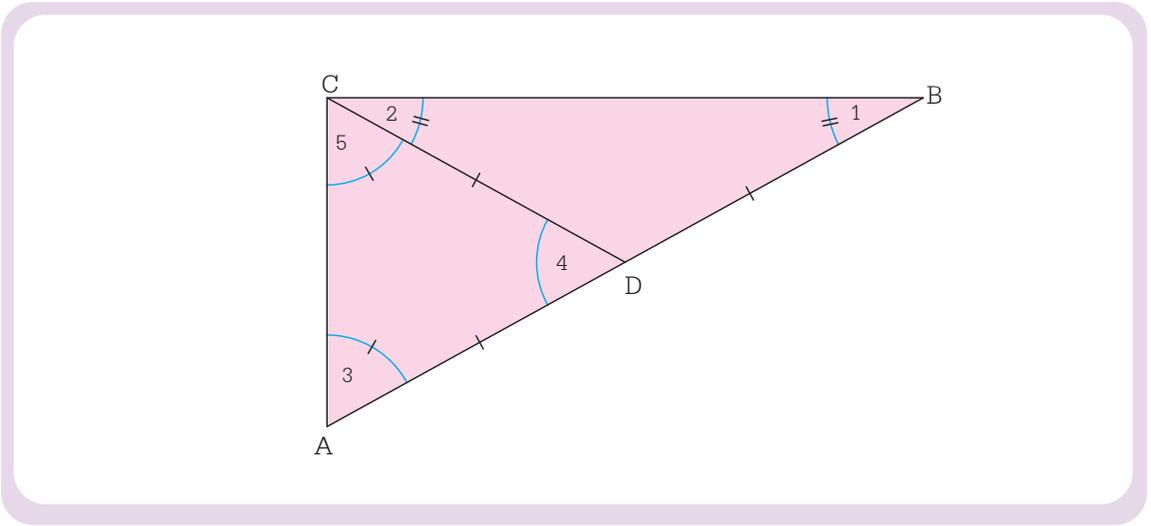
กำหนดให้ _____

ต้องพิสูจน์ว่า _____

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1) $\hat{1} = \hat{2}$	_____
2) $\hat{3} = \hat{4}$	_____
3) $BA = DE$	_____
4) _____	_____
5) $CB = FD$	_____

2. จากรูปที่กำหนด $AD = CD = BD$ พิสูจน์ว่า \hat{ACB} เป็นมุมฉาก



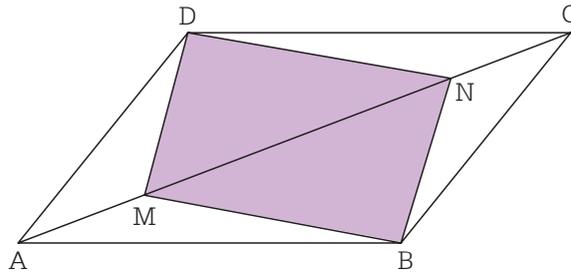
กำหนดให้

ต้องพิสูจน์ว่า

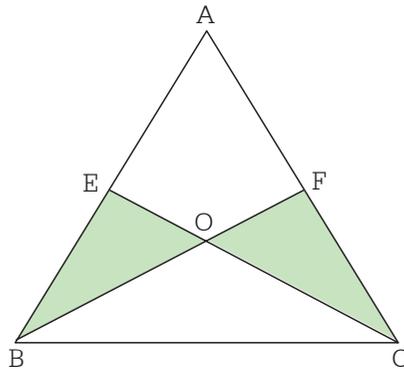
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1) $\hat{1} = \hat{2}$	<hr/> <hr/>
2) $\hat{3} = \hat{5}$	<hr/> <hr/>
3) $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{5} =$ _____	<hr/> <hr/>
4) $2(\hat{2} + \hat{5}) =$ _____	<hr/> <hr/>
5) $\hat{2} + \hat{5} =$ _____	<hr/> <hr/>
6) ดังนั้น _____	<hr/> <hr/>

3. จากรูปที่กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $\triangle AMD \cong \triangle CNB$
พิสูจน์ว่า $\widehat{MDN} = \widehat{NBM}$



4. จากรูปที่กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB และ AC ตามลำดับ พิสูจน์ว่า $\triangle BOE \cong \triangle COF$





กระบวนการคิดขั้นสูง เชิงระบบ GPAS 5 Steps

สอดคล้องกับการเลื่อนวิทยฐานะ (๖ PA)

ข้อตกลง ในการพัฒนางาน

ออกแบบการจัดการเรียนรู้
การส่งเสริมการเรียนรู้
และการพัฒนาตนเองด้วย
GPAS 5 Steps

ผลงาน ทางวิชาการ

มีนวัตกรรม
การจัดการเรียนรู้
การส่งเสริมการเรียนรู้
และการพัฒนาตนเอง
ที่มีคุณภาพ
และคุณประโยชน์ต่อวิชาชีพครู

กรรมการประเมิน ตามวิทยฐานะ

ผลการประเมินของคณะกรรมการ
ด้านการจัดการเรียนรู้ การส่งเสริมการเรียนรู้
และการพัฒนาตนเองตามวิทยฐานะ

ประเมินผลการพัฒนางาน ตามข้อตกลง

เสนอผลของการจัดการเรียนรู้
การส่งเสริมการเรียนรู้
และการพัฒนาตนเอง
จากการพัฒนาด้วย
GPAS 5 Steps

สรุปผลการประเมิน การพัฒนางาน

สรุปผลการประเมิน
การจัดการเรียนรู้
การส่งเสริมการเรียนรู้
และการพัฒนาตนเอง
ที่เกิดจากการคิด
ขั้นสูงเชิงระบบ
GPAS 5 Steps



สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.)
บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด
1256/9 ถนนนครไชยศรี แขวงถนนนครไชยศรี เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทร. 0-2243-8000 (อัตโนมัติ 15 สาย), 0-2241-8999
แฟกซ์ : ทุกหมายเลข, แฟกซ์อัตโนมัติ : 0-2241-4131, 0-2243-7666

สงวนลิขสิทธิ์ หนังสือเล่มนี้ได้จดทะเบียนลิขสิทธิ์ถูกต้องตามกฎหมาย

website :
www.iadth.com



8 859764 306369

ราคา 99 บาท